Prof. F. Svaricek
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Digitale Regelung

Übung 6

Aufgabe 2 soll zuhause bearbeitet und in der Übung vorgerechnet werden.

Aufgabe 1. Man betrachte ein Pendel von Masse m und Länge l, das auf einen Wagen montiert ist, so wie in Abb. 1 dargestellt. Die Beschleunigung u des Wagens sei eine Stellgröße. Die Masse des Stabs werde vernachlässigt.

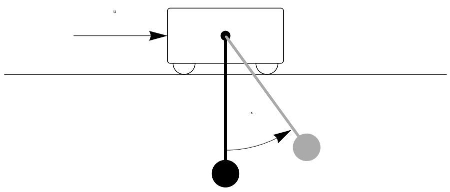

Abbildung 1: Pendel-Wagen-System

(i) Man verifiziere, dass die Dynamik des Systems durch die folgende Differentialgleichung gegeben ist (g sei die Erdbeschleunigung, γ sei der Reibungskoeffizient für die Reibung am Aufhängepunkt des Pendels):

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin(\varphi) - \frac{\omega^2}{g} \cos(\varphi) \cdot u - \gamma\dot{\varphi}. \tag{1}$$

Man bestimme die Konstante ω in Abhängigkeit vom Trägheitsmoment J am Aufhängepunkt sowie den Größen g, m und l.

(ii) Man linearisiere (1) um die Ruhelage $(\varphi, \dot{\varphi}) = (\pi, 0)$ und $u = 0$, und bestimme die Übertragungsfunktion $G(s)$ des linearisierten Systems.

(iii) Man bestimme die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ des diskretisierten (und linearisierten) Systems, welches mit Periode $T > 0$ abgetastet wird. Man berechne nur den Fall $\gamma = 0$.

(iv) Man führe das linearisierte Pendel-Wagen-System in ein (kontinuierliches) Zustandsraummodell der Form $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$, $y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t)$ über (wenn φ die einzige Ausgangsgröße ist).

(v) Man bestimme das äquivalente zeitdiskrete Zustandsraummodell

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_d u(k), \quad y(k) = \mathbf{c}_d^T\mathbf{x}(k) \tag{2}$$

für den Fall $\gamma = 0$ und die Abtastzeit $T > 0$.

Aufgabe 2. (w-Transformation)
Man beweise im Detail folgende Eigenschaft der in der Vorlesung eingeführten w-Transformation. Sei $C(X) = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \ldots + \alpha_0$ ein reelles Polynom vom Grad $n > 0$ (d.h. $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_n \neq 0$) und sei $\widetilde{C}(X)$ ein Polynom definiert durch

$$\widetilde{C}(X) := (1 - X)^n C\Big(\frac{1 + X}{1 - X}\Big).$$

Dann gilt: Ist $\widetilde{C}$ ein Hurwitz-Polynom vom Grad n, so liegen alle Nullstellen von C im Inneren des Einheitskreises. Man zeige also

$$\Big(\big(\widetilde{C}(w) = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{Re} w < 0\big) \text{ und } \deg \widetilde{C} = n\Big) \;\Rightarrow\; \big(C(z) = 0 \;\Rightarrow\; |z| < 1\big).$$