Prof. F. Svaricek
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Digitale Regelung

# Übung 5 - Lösung

**Aufgabe 1.** Man berechne eine $z$-Übertragungsfunktion, die ein $PDT_1$-System bei einer Abtastzeit von $T > 0$ beschreibt auf zwei verschiedene Arten:

(i) durch Berechnung der äquivalenten $z$-Übertragungsfunktion,

(ii) durch Diskretisierung der Differenzialgleichung $T_1\dot{y}(t) + y(t) = K[u(t) + T_D\dot{u}(t)]$, wobei $K$, $T_D$ und $T_1$ positive Konstanten sind.

Zur Erinnerung, die kontinuierliche Übertragungsfunktion eines $PDT_1$-Systems lautet

$$G_{PDT_1}(s) = K \cdot \frac{1 + sT_D}{1 + sT_1}.$$

**Lösung Aufgabe 1.** (i)

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\Big(\mathcal{L}^{-1}(\frac{G(s)}{s})\Big|_{t=kT}\Big) = \\
&= \frac{z-1}{z} \cdot K \cdot \mathcal{Z}\Big(\mathcal{L}^{-1}(\frac{1+sT_D}{s(1+sT_1)})\Big|_{t=kT}\Big) \\
&= \frac{z-1}{z} \cdot K \cdot \mathcal{Z}\Big(\mathcal{L}^{-1}(T_D\frac{1/T_1}{s+1/T_1} + \frac{1/T_1}{s(s+1/T_1)})\Big|_{t=kT}\Big) \\
&= \frac{z-1}{z} \cdot K\Big(\frac{T_D}{T_1} \cdot \frac{z}{z-e^{-T/T_1}} + \frac{(1-e^{-T/T_1})z}{(z-1)(z-e^{-T/T_1})}\Big) \\
&= K \cdot \Big(\frac{T_D}{T_1}\frac{z-1}{z-e^{-T/T_1}} + \frac{1-e^{-T/T_1}}{z-e^{-T/T_1}}\Big) \\
&= K \cdot \frac{T_D}{T_1} \cdot \frac{z - \big(1 + (T_1/T_D)e^{-T/T_1} - T_1/T_D\big)}{z-e^{-T/T_1}}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
&T_1 \cdot \frac{y(k)-y(k-1)}{T} + y(k) = K \cdot \Big(u(k) + T_D\frac{u(k)-u(k-1)}{T}\Big) \\
&\iff (1+T_1/T)Y(z) - (T_1/T)z^{-1}Y(z) = K \cdot \Big(U(z) + (T_D/T)(U(z) - z^{-1}U(z))\Big)
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
G(z) &= K \cdot \frac{(1+\frac{T_D}{T})z - \frac{T_D}{T}}{(1+\frac{T_1}{T})z - \frac{T_1}{T}} \\
&= K \cdot \frac{T+T_D}{T+T_1} \cdot \frac{z - \frac{T_D}{T+T_D}}{z - \frac{T_1}{T+T_1}}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 2.** In Übung 4 Aufgabe 1 wurde eine kontinuierliche Strecke mit Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{K_s}{s(1+sT_s)}$ betrachtet. Die äquivalente $z$-Übertragungsfunktion $G(z)$ bei Abtastzeit $T > 0$ lautet

$$G(z) = K_s \frac{(T - T_s + T_s z_p)z + T_s - z_p(T + T_s)}{(z-1)(z-z_p)}, \quad K_s > 0,\ T_s > 0$$

mit $z_p = e^{-T/T_s}$.

(i) Man schließe den zeitdiskreten Regelkreis mit einem zeitdiskreten $PDT_1$-Regler, so dass die Pole des geschlossenen, zeitdiskreten Regelkreises bei

$$q_\pm = e^{p_\pm T}, \quad p_\pm = -\pi/2 \pm j\pi/2 \tag{1}$$

liegen. Man verwende

$$G_{PDT_1}(z) = K \cdot \frac{z-a}{z-b}$$

als $z$-Übertragungsfunktion des Reglers mit den Konstanten $K, a, b$.

(ii) Man berechne die Konstanten $K, a, b$ aus (i) für die Daten $K_s = 1$, $T_s = 2$, $T = 0.2$ und $q_\pm$ wie in (1) angegeben.

**Lösung Aufgabe 2.** Wir fassen Konstanten zusammen und schreiben

$$G(z) = \frac{k_2 z + k_1}{(z-1)(z-z_p)}.$$

Die Pole des geschlossenen, zeitdiskreten Regelkreises sind die Nullstellen von

$$1 + G_{PDT_1}(z)G(z) = 1 + K\frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{k_2 z + k_1}{(z-1)(z-z_p)}.$$

Um die Zahl der Pole von drei auf zwei zu reduzieren setzen wir zunächst $a = z_p$. Um Pole bei $q_\pm$ zu konstruieren müssen machen wir folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned}
&(z-1)(z-b) + Kk_2 z + Kk_1 = (z-q_+)(z+q_-) \\
\iff\ & z^2 - z(1 + b - Kk_2) + b + Kk_1 = z^2 - z(q_+ + q_-) + q_+ q_-.
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
1 + b - Kk_2 &= q_+ + q_- \\
b + Kk_1 &= q_+ q_-
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 & -k_2 \\ 1 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_+ + q_- - 1 \\ q_+ q_- \end{pmatrix}$$

Also

$$\begin{pmatrix} b \\ K \end{pmatrix} = \frac{1}{k_1 + k_2} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_+ + q_- - 1 \\ q_+ q_- \end{pmatrix}.$$

Mit den angegebenen Daten erhält man $a \approx 0.90$, $b \approx 0.46$ und $K \approx 7.57$.