Prof. F. Svaricek
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Digitale Regelung

Übung 3 - Lösung

Aufgabe 1. Man bestimme für die nachfolgenden Folgen $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ die z-Transformation

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k},$$

wobei $|z| > 1$.

(i) $f_k = (-a)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $|z| > |a| \geq 1$, $a \in \mathbb{C}$.

(ii) $f_k = \begin{cases} 1, & k = 0, 2, 4, \ldots \\ 0, & k = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$

(iii) $f_k = \frac{1}{2}(kT)^2$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $T > 0$.

(iv) $f_k = \frac{T^2}{2}k(k-1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $T > 0$.

(v) $f_k = \sin(k\omega T)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $\omega > 0$, $T > 0$.

Hinweis: Für $|z| > 1$ verwende man ohne Nachweis

$$\sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} = \frac{z}{(z-1)^2}, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^{-k} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}. \tag{2}$$

Lösung Aufgabe 1. (i)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-a^{-1}z)^{-k} \underset{|a^{-1}z|>1}{=} \frac{1}{1-(-az^{-1})} = \frac{z}{z+a}$$

(ii) Wir bemerken $f_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k$. Damit

$$F(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-k} \underset{\text{(i)}}{=} \frac{z}{2z-2} + \frac{z}{2z+2} = \frac{z^2}{z^2-1}.$$

(iii)

$$F(z) = \frac{T^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^{-k} \underset{(2)}{=} \frac{T^2}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

(iv)

$$F(z) = \frac{T^2}{2}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k}\Big) = \frac{T^2}{2}\Big(\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{z}{(z-1)^2}\Big)$$
$$= \frac{T^2 z}{(z-1)^3}$$

(v)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin(k\omega T) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{jk\omega T} - e^{-jk\omega T}}{2j} \cdot z^{-k} =$$
$$= \frac{1}{2j} \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} e^{jk\omega T} z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-jk\omega T} z^{-k}\Big) =$$
$$\underset{\text{(i)}}{=} \frac{1}{2j} \cdot \Big(\frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T}}\Big)$$
$$= \frac{1}{2j} \cdot \frac{z(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})}{z^2 + 1 - z(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})}$$
$$= \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$$

Aufgabe 2. Die z-Transformation einer Folge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ sei gegeben durch

(i)

$$F(z) = \frac{z - a}{(z-b)(z-c)}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$, $b \neq c$;

(ii)

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Man bestimme jeweils die Folge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ mittels der Residuenmethode (siehe Skript).

Lösung Aufgabe 2. (i) Wir bemerken zunächst, dass b und c nach Voraussetzung einfache Pole von $F(z)$ sind. Daher gilt

$$f_k = \operatorname{Res}(F(z)z^{k-1}, b) + \operatorname{Res}(F(z)z^{k-1}, c)$$

mit

$$\operatorname{Res}(F(z)z^{k-1}, b) = \lim_{z \to b} \frac{z-a}{z-c} z^{k-1} = \frac{b-a}{b-c} b^{k-1}$$

sowie

$$\operatorname{Res}(F(z)z^{k-1}, c) = \lim_{z \to c} \frac{z-a}{z-b} z^{k-1} = \frac{c-a}{c-b} c^{k-1}.$$

Also

$$f_k = \frac{b-a}{b-c} \cdot b^{k-1} - \frac{c-a}{b-c} \cdot c^{k-1}.$$

(ii) 1 ist ein zweifacher Pol, d.h.

$$\operatorname{Res}(F(z)z^{k-1}, 1) = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} z^k = \lim_{z \to 1} k z^{k-1} = k.$$

Es folgt $f_k = k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 3. Für $k \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\epsilon \in \{0, 1\}$ und eine Folge $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$ sei durch

$$y_k = \alpha y_{k-1} + \beta u_{k-\epsilon} \tag{3}$$

eine Differenzengleichung gegeben. Wird ein PT_1-System gegeben durch $T_1 \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$ mit Periode $T > 0$ abgetastet und wird $\dot{y}(kT)$ durch den Rückwärtsdifferenzenquotienten $\frac{y(kT) - y((k-1)T)}{T} = \frac{y_k - y_{k-1}}{T}$ approximiert, so entsteht laut Vorlesung eine Differenzengleichung der Form (3) mit Konstanten

$$\alpha = T_1/(T + T_1), \ \beta = T/(T + T_1), \ \epsilon = 0. \tag{4}$$

(i) Man verifiziere, dass die durch (3) gegebene Folge $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ durch

$$y_k = \alpha^k y_0 + \beta \cdot \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha^\nu u_{k-\epsilon-\nu} \tag{5}$$

und $y_0 \in \mathbb{R}$ berechnet werden kann.

(ii) Sei $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$ gegeben durch $u_\nu = 0$ für alle $\nu < 0$ und $u_\nu = 1$ für alle $\nu \geq 0$ (Sprungfolge). Man diskutiere die Existenz des Grenzwertes $\lim_{k \to \infty} y_k$ in Abhängigkeit von α.
Hinweis: Es gilt $\sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha^\nu = \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}$ *für* $\alpha \neq 1$.

(iii) Man berechne für ein PT_1-System die Konstanten α, β und ϵ in (3), wenn für $\dot{y}(kT)$ der Vorwärtsdifferenzenquotient $\frac{y_{k+1} - y_k}{T}$ verwendet wird.

(iv) Man diskutiere den Grenzwert $\lim_{k \to \infty} y_k$ für die in (4) und in (iii) gegebenen Diskretisierungen eines PT_1-Systems.

Lösung Aufgabe 3.

(a) Mit Induktion über k: Der Fall $k = 1$ ist klar. Wir nehmen an, (5) gelte für ein $k \in \mathbb{N}$ (Induktionsannahme). Wir müssen zeigen, dass (5) auch für $k + 1$ gültig ist, d.h. (3) reproduziert:

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= \alpha^{k+1} y_0 + \beta \sum_{\nu=0}^{k} \alpha^\nu u_{k+1-\epsilon-\nu} = \\
&= \alpha \cdot \alpha^k y_0 + \beta \Big(\sum_{\nu=1}^{k} \alpha^\nu u_{k+1-\epsilon-\nu} \Big) + \beta u_{k+1-\epsilon} = \\
&= \alpha \underbrace{\Big(\alpha^k y_0 + \beta \sum_{\nu=1}^{k} \alpha^{\nu-1} u_{k+1-\epsilon-\nu} \Big)}_{= y_k} + \beta u_{k+1-\epsilon} = \\
&= \alpha y_k + \beta u_{k+1-\epsilon}.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt für $\alpha \neq 1$:

$$y_k = y_0 \alpha^k + \beta \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} = \frac{\beta}{1-\alpha} + \alpha^k \frac{((1-\alpha)y_0 - \beta)}{1-\alpha}.$$

Der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} y_k$ existiert für $|\alpha| < 1$; $\lim_{k\to\infty} y_k = \frac{\beta}{1-\alpha}$.
Der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} y_k$ existiert für $\alpha = 1$ und $\beta = 0$; $\lim_{k\to\infty} y_k = y_0$.
In allen anderen Fällen existiert der Grenzwert nicht (wie man sich leicht überlegen kann).

(c)

$$\alpha = 1 - T/T_1, \quad \beta = T/T_1, \quad \epsilon = 1$$

(d) Für $T \geq 2T_1$ existiert mit den Daten aus (iii) der Grenzwert nicht. Andernfalls lautet er in allen Fällen

$$\frac{\beta}{1-\alpha} = 1.$$