Prof. F. Svaricek
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Digitale Regelung

Übung 3

Aufgabe 1 soll zuhause bearbeitet und in der Übung vorgerechnet werden.

Aufgabe 1. Man bestimme für die nachfolgenden Folgen $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ die z-Transformation

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k},$$

wobei $|z| > 1$.

(i) $f_k = (-a)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $|z| > |a| \geq 1$, $a \in \mathbb{C}$.

(ii) $f_k = \begin{cases} 1, & k = 0, 2, 4, \ldots \\ 0, & k = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$

(iii) $f_k = \frac{1}{2}(kT)^2$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $T > 0$.

(iv) $f_k = \frac{T^2}{2}k(k-1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $T > 0$.

(v) $f_k = \sin(k\omega T)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $\omega > 0$, $T > 0$.

Hinweis: Für $|z| > 1$ verwende man ohne Nachweis

$$\sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} = \frac{z}{(z-1)^2}, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^{-k} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}. \tag{2}$$

Aufgabe 2. Die z-Transformation einer Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ sei gegeben durch

(i)
$$F(z) = \frac{z-a}{(z-b)(z-c)}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$, $b \neq c$;

(ii)
$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Man bestimme jeweils die Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ mittels der Residuenmethode (siehe Skript).

Bitte wenden.

Aufgabe 3. Für $k \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\epsilon \in \{0,1\}$ und eine Folge $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ sei durch

$$y_k = \alpha y_{k-1} + \beta u_{k-\epsilon} \tag{3}$$

eine Differenzengleichung gegeben. Wird ein PT_1-System gegeben durch $T_1\dot{y}(t)+y(t) = u(t)$ mit Periode $T > 0$ abgetastet und wird $\dot{y}(kT)$ durch den Rückwärtsdifferenzenquotienten $\frac{y(kT)-y((k-1)T)}{T} = \frac{y_k - y_{k-1}}{T}$ approximiert, so entsteht laut Vorlesung eine Differenzengleichung der Form (3) mit Konstanten

$$\alpha = T_1/(T+T_1),\ \beta = T/(T+T_1),\ \epsilon = 0. \tag{4}$$

(i) Man verifiziere, dass die durch (3) gegebene Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ durch

$$y_k = \alpha^k y_0 + \beta \cdot \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha^\nu u_{k-\epsilon-\nu} \tag{5}$$

und $y_0 \in \mathbb{R}$ berechnet werden kann.

(ii) Sei $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ gegeben durch $u_\nu = 0$ für alle $\nu < 0$ und $u_\nu = 1$ für alle $\nu \geq 0$ (Sprungfolge). Man diskutiere die Existenz des Grenzwertes $\lim_{k\to\infty} y_k$ in Abhängigkeit von α.
Hinweis: Es gilt $\sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha^\nu = \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}$ *für* $\alpha \neq 1$.

(iii) Man berechne für ein PT_1*-System die Konstanten* α, β *und* ϵ *in* (3), *wenn für* $\dot{y}(kT)$ *der Vorwärtsdifferenzenquotient* $\frac{y_{k+1}-y_k}{T}$ *verwendet wird.*

(iv) Man diskutiere den Grenzwert $\lim_{k\to\infty} y_k$ *für die in* (4) *und in (iii) gegebenen Diskretisierungen eines* PT_1*-Systems.*