Prof. F. Svaricek
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Digitale Regelung, FT

Übung 1 - Lösung

Eine T-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (f habe also die Eigenschaft $f(t) = f(t+T)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, f sei stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar) kann in eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen, der *reellen Fourierreihe, wie folgt zerlegt werden (für fast alle t):*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t), \tag{1}$$

wobei $\omega = 2\pi/T$. Die Koeffizienten a_0, a_k und b_k sind durch

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

für $k = 1, 2, \ldots$ gegeben. Die Konstante $c \in \mathbb{R}$ kann beliebig gewählt werden. Für Anwendungen wählt man meist $c = 0$ oder $c = -T/2$. f kann auch in eine komplexe Fourierreihe zerlegt werden (für fast alle t):

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t}, \tag{5}$$

wobei $j = \sqrt{-1}$ und für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$c_k = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(t) e^{-jk\omega t}\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Aufgabe 1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische Funktion. Man zeige folgende Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten der reellen und der komplexen Fourierreihe von f für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$a_0 = 2c_0, \tag{7}$$

$$a_k = c_k + c_{-k}, \tag{8}$$

$$b_k = j(c_k - c_{-k}). \tag{9}$$

Lösung Aufgabe 1.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\cos(k\omega t) + j\sin(k\omega t)) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\cos(k\omega t) + j\sin(k\omega t)) + c_{-k}(\cos(-k\omega t) + j\sin(-k\omega t)) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\cos(k\omega t) + j\sin(k\omega t)) + c_{-k}(\cos(k\omega t) - j\sin(k\omega t)) \\
&= \underbrace{c_0}_{a_0/2} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(c_k + c_{-k})}_{a_k}\cos(k\omega t) + \underbrace{j(c_k - c_{-k})}_{b_k}\sin(k\omega t)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische Funktion. Man zeige für die Koeffizienten a_0, a_k, b_k in (1) folgende Eigenschaften:

1. Ist f *ungerade, d.h.* $f(-t) = -f(t)$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$, *so folgt* $a_k = 0$ *für alle* $k = 0, 1, \ldots$
2. Ist f *gerade, d.h.* $f(-t) = f(t)$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$, *so folgt* $b_k = 0$ *für alle* $k = 1, 2, \ldots$

Lösung Aufgabe 2. Wir zeigen 1., Aussage 2. folgt analog. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{T}{2} \cdot a_k &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \int_{-T/2}^{0} f(t)\cos(k\omega t)\,dt + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt \\
&= -\int_{-T/2}^{0} f(-t)\cos(k\omega t)\,dt + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt \\
&= -\int_{T/2}^{0} (-1)\cdot f(u)\cos(k\omega u)\,du + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt,
\end{aligned}
$$

wobei wir in der letzten Zeile die Substitution $u = -t$ vorgenommen haben. Durch Vertauschen der Integralgrenzen folgt die Behauptung.

Aufgabe 3. Man berechne die reelle Fourierreihe der ungeraden Rechteckimpulsfolge (siehe Abb. 1, an den Sprungstellen nehme die Funktion den Wert 0 an).

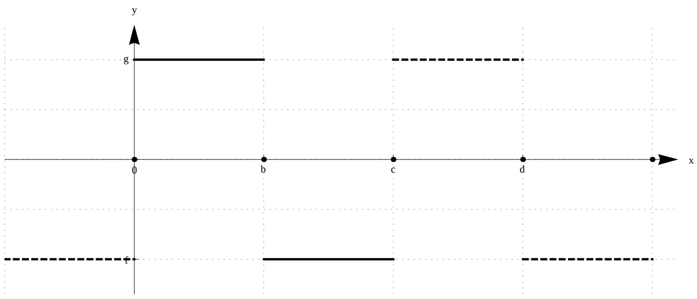

Abbildung 1: Ungerade Rechteckimpulsfolge

Lösung Aufgabe 3. Wir bezeichnen den betrachteten Rechteckimpuls mit f_3. Es gilt

$$f_3(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T/2 \\ 0, & t = T/2 \\ -1, & T/2 \leq t < T \end{cases}$$

und damit $f_3(-t) = -f_3(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es folgt $a_k =$ für alle $k = 0, 1, \ldots$. Wir rechnen weiter:

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} b_k &= \int_0^{T/2} \sin(k\omega t)\mathrm{d}t - \int_{T/2}^{T} \sin(k\omega T)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{k\omega}\cos(k\pi) + \frac{1}{k\omega}\cos(0) + \frac{1}{k\omega}\cos(2\pi k) - \frac{1}{k\omega}\cos(k\pi) = \\ &= \frac{1}{k\omega}\left(-\cos(k\pi) + 2 - \cos(k\pi)\right) \\ &= \frac{2}{k\omega}(1 - \cos(k\pi)). \end{aligned}$$

Da

$$\cos(k\pi) = \begin{cases} 1, & k \equiv 0 \mod 2 \\ -1, & k \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$$

schließen wir

$$b_k = \frac{4}{k\omega T}(1 - (-1)^k).$$

(Die Schreibweise $k \equiv 1 \mod 2$ bedeutet, dass $k - 1$ durch 2 ganzzahlig teilbar ist, usw.) Die Fourierreihe lautet also

$$f_3(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\omega T}(1 - (-1)^k)\sin(k\omega T) = \frac{8}{\omega T}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)}\sin((2n+1)\omega T).$$

Aufgabe 4. Man berechne die reelle Fourierreihe der in Abb. 2 dargestellten Dreieckimpulsfolge.

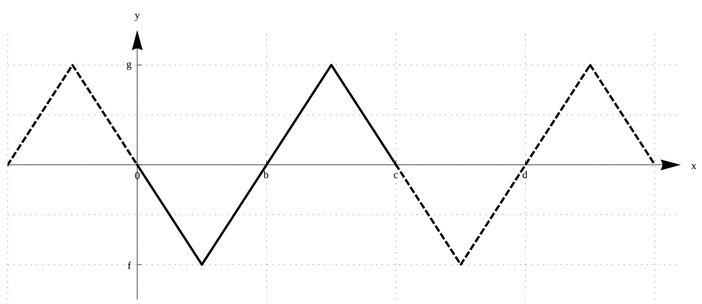

Abbildung 2: Dreieckimpulsfolge

Lösung Aufgabe 4. Wir bezeichnen den betrachteten Dreieckimplus mit f_4. Es gilt

$$f_4(t) = \begin{cases} -\frac{4}{T} \cdot t, & -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4} \\ \frac{4}{T} \cdot t - 2, & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4} \end{cases}. \tag{10}$$

Wir überlegen uns zuerst:

$$\begin{aligned} \sin\left(\tfrac{3\pi k}{2}\right) &= \sin\left(k\pi + \tfrac{\pi k}{2}\right) = \sin(k\pi)\cos\left(\tfrac{\pi k}{2}\right) + \cos(k\pi)\sin\left(\tfrac{\pi k}{2}\right) = \\ &= \begin{cases} 0, & k \equiv 0,2 \mod 4 \\ -1, & k \equiv 1 \mod 4 \\ 1, & k \equiv 3 \mod 4 \end{cases} = -\sin\left(\tfrac{\pi k}{2}\right) = \sin\left(\tfrac{-\pi k}{2}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

sowie

$$\begin{aligned} \cos\left(\tfrac{3\pi k}{2}\right) &= \cos\left(k\pi + \tfrac{\pi k}{2}\right) = \cos(k\pi)\cos\left(\tfrac{\pi k}{2}\right) - \sin(k\pi)\sin\left(\tfrac{\pi k}{2}\right) = \\ &= \begin{cases} 0, & k \equiv 1,3 \mod 4 \\ 1, & k \equiv 0 \mod 4 \\ -1, & k \equiv 2 \mod 4 \end{cases} = \cos\left(\tfrac{\pi k}{2}\right) = \cos\left(\tfrac{-\pi k}{2}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Weiter bemerken wir mit Aufgabe 2, dass $a_k = 0$ für alle $k = 0, 1, \ldots$. Nun rechnen wir:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/4}^{T/4} -\frac{4t}{T}\sin(k\omega t)\,dt + \int_{T/4}^{3T/4} (\frac{4t}{T} - 2)\sin(k\omega t)\,dt\right] \\ &= \frac{8}{T^2}\left[\int_{T/4}^{3T/4} t\sin(k\omega t)\,dt - \frac{T}{2}\int_{T/4}^{3T/4} \sin(k\omega t)\,dt - \int_{-T/4}^{T/4} t\sin(k\omega t)\,dt\right] \\ &= \frac{8}{T^2}\left[\left(\frac{\sin(k\omega t)}{k^2\omega^2} - \frac{t\cos(k\omega t)}{k\omega}\Big|_{T/4}^{3T/4}\right) - 0 - \left(\underbrace{\frac{\sin(k\omega t)}{k^2\omega^2}}_{=:S(t)} - \underbrace{\frac{t\cos(k\omega t)}{k\omega}}_{=:C(t)}\Big|_{-T/4}^{T/4}\right)\right] \\ &= \frac{8}{T^2}\big[S(3T/4) - C(3T/4) - S(T/4) + C(T/4) \\ &\quad - S(T/4) + C(T/4) + S(-T/4) - C(-T/4)\big] = \\ &\underset{(12)}{=} \frac{8}{T^2} \cdot 4 \cdot S(-T/4) \\ &= -\frac{8}{T^2} \cdot \frac{4}{k^2\omega^2}\sin\left(\tfrac{k\pi}{2}\right) = -\frac{8 \cdot 4}{(2\pi)^2 k^2}\sin\left(\tfrac{k\pi}{2}\right) \\ &\underset{(11)}{=} -\frac{8}{\pi^2 k^2}\begin{cases} 0, & k \equiv 0,2 \mod 4 \\ 1, & k \equiv 1 \mod 4 \\ -1, & k \equiv 3 \mod 4 \end{cases}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt:

$$\int t \sin(k\omega t)\ dt = -t \cdot \frac{\cos(k\omega t)}{k\omega} + \int \frac{\cos(k\omega t)}{k\omega}\ dt.$$

Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned} f_4(t) &= -\frac{8}{\pi^2}\left[\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\sin(5\omega t) - \frac{1}{7^2}\sin(7\omega t) \pm \ldots\right] \\ &= -\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin((2n+1)\omega t). \end{aligned}$$

Aufgabe 5. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(t) \to 0$, wenn $|t| \to \infty$, sowie $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t < \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\ \mathrm{d}t < \infty$. Man zeige die Beziehung

$$\widehat{f'}(\omega) = j\omega\widehat{f}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

zwischen der Fourier-Transformierten $\widehat{f}$ von f und der Fourier-Transformierten $\widehat{f'}$ von f'.

Lösung Aufgabe 5. Wir rechnen mit Hilfe partieller Integration:

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \\ &= \underbrace{f(t)e^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-j\omega)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = j\omega\widehat{f}(\omega). \end{aligned}$$