Prof. F. Svaricek
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Digitale Regelung, FT

Übung 1

Aufgabe 1 soll zuhause bearbeitet und in der Übung vorgerechnet werden.

Eine T-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (f habe also die Eigenschaft $f(t) = f(t+T)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, f sei stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar) kann in eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen, der *reellen Fourierreihe, wie folgt zerlegt werden (für fast alle t):*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t), \tag{1}$$

wobei $\omega = 2\pi/T$. Die Koeffizienten a_0, a_k und b_k sind durch

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

für $k = 1, 2, \dots$ gegeben. Die Konstante $c \in \mathbb{R}$ kann beliebig gewählt werden. Für Anwendungen wählt man meist $c = 0$ oder $c = -T/2$. f kann auch in eine komplexe Fourierreihe zerlegt werden (für fast alle t):

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t}, \tag{5}$$

wobei $j = \sqrt{-1}$ und für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$c_k = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t) e^{-jk\omega t}\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Aufgabe 1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische Funktion. Man zeige folgende Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten der reellen und der komplexen Fourierreihe von f für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$a_0 = 2c_0, \tag{7}$$

$$a_k = c_k + c_{-k}, \tag{8}$$

$$b_k = j(c_k - c_{-k}). \tag{9}$$

Aufgabe 2. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische Funktion. Man zeige für die Koeffizienten a_0, a_k, b_k in (1) folgende Eigenschaften:

1. Ist f *ungerade, d.h.* $f(-t) = -f(t)$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$*, so folgt* $a_k = 0$ *für alle* $k = 0, 1, \ldots$

2. Ist f *gerade, d.h.* $f(-t) = f(t)$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$*, so folgt* $b_k = 0$ *für alle* $k = 1, 2, \ldots$

Aufgabe 3. Man berechne die reelle Fourierreihe der ungeraden Rechteckimpulsfolge (siehe Abb. 1, an den Sprungstellen nehme die Funktion den Wert 0 an).

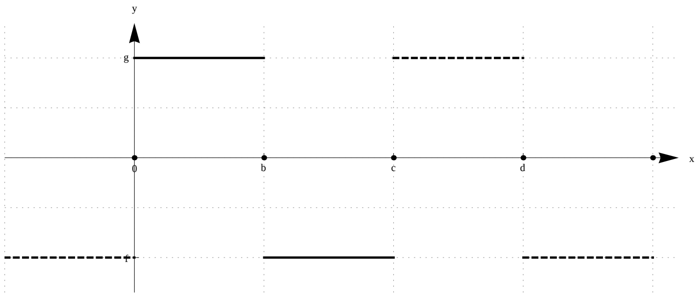

Abbildung 1: Ungerade Rechteckimpulsfolge

Aufgabe 4. Man berechne die reelle Fourierreihe der in Abb. 2 dargestellten Dreieckimpulsfolge.

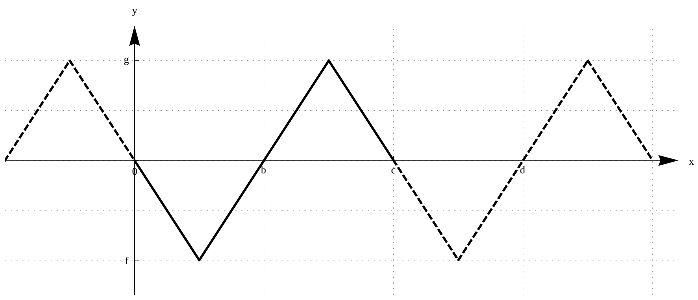

Abbildung 2: Dreieckimpulsfolge

Aufgabe 5. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(t) \to 0$, wenn $|t| \to \infty$, sowie $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$. Man zeige die Beziehung

$$\widehat{f'}(\omega) = j\omega \widehat{f}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

zwischen der Fourier-Transformierten $\widehat{f}$ von f und der Fourier-Transformierten $\widehat{f'}$ von f'.