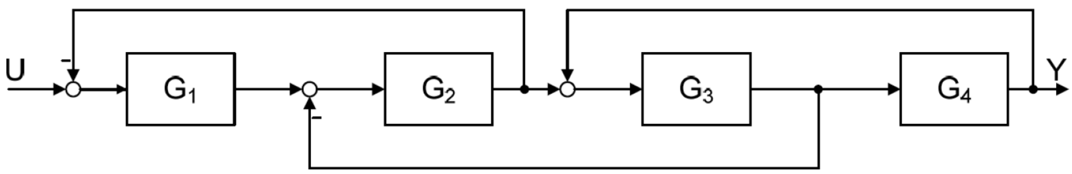
F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Steuer- und Regelungstechnik, WT 2021

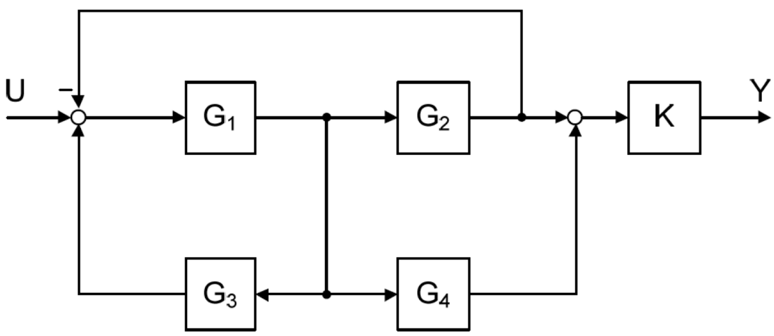
Übung 6 - Lösung

Thema: Blockschaltbild-Algebra, Aktive Beeinflussung von Systemverhalten, Stabilität

Aufgabe 1. Zusammenfassen von Blockschaltbildern
Gegeben sind die beiden folgenden Blockschaltbilder



(a) Blockschaltbild 1



(b) Blockschaltbild 2

mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_1(s) - G_1(s)$ sowie $K(s)$.

Aufgabe Fassen Sie beide angegebenen Blockschaltbilder zu einer Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ zusammen.

Lösung Aufgabe 1.
Zunächst wird die Lösung durch geeignetes Umformen des Blockschaltbildes gezeigt. Im ersten Schritt wird der Summationspunkt zwischen den Blöcken G_1 und G_2 nach vorne vor den Block G_1 gezogen und der Verzweigungspunkt zwischen den Blöcken G_3 und G_4 hinter den Block G_4 gezogen. Dies resultiert dann in dem in Abb. 1 dargestellten Blockschaltbild.

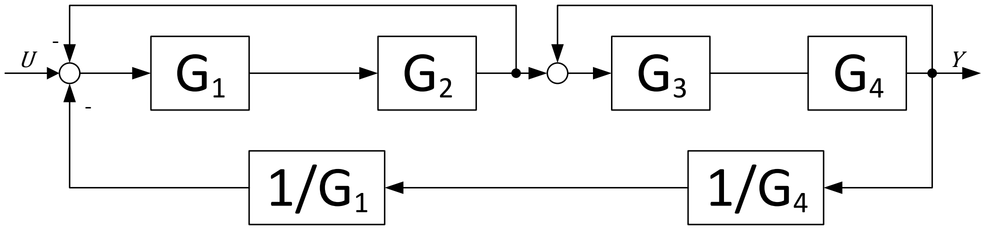


Abbildung 1: Umformen des Blockschaltbildes – Schritt 1

Nun können die beiden oberen Rückkopplungen zusammengefasst werden, sodass sich das in Abb. 2 dargestellte Blockschaltbild ergibt.

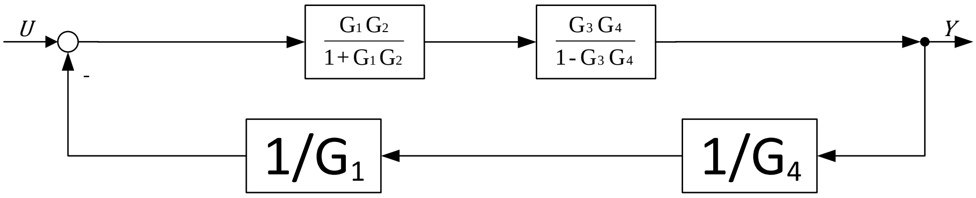


Abbildung 2: Umformen des Blockschaltbildes – Schritt 2

Das resultierende Blockschaltbild in Abb. 2 besteht nun nur noch aus einer einfachen negativen Rückkopplung und kann mit

$$G = \frac{G_v}{1 + G_0}$$

zusammengefasst werden, wobei für $G_0 = G_v \cdot G_r$ gilt. Die beiden Übertragungsfunktionen G_v und G_r ergeben sich zu

$$\begin{aligned} G_r &= \frac{1}{G_1 G_4}\,, \\ G_v &= \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot \frac{G_3 G_4}{1 - G_3 G_4} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4)}\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt für G_0

$$G_0 = G_v \cdot G_r = \frac{G_2 G_3}{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4)}$$

Damit lässt sich nun der Nenner der Gesamtübertragungsfunktion zu

$$\begin{aligned} 1 + G_0 &= 1 + \frac{G_2 G_3}{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4)} \\ &= \frac{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4) + G_2 G_3}{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4)} \end{aligned}$$

bestimmen. Die Übertragungsfunktion ergibt sich dann schlussendlich zu

$$\begin{aligned} G &= \frac{G_v}{1 + G_0} \\ &= \frac{\cancel{(1 + G_1 G_2)}\cancel{(1 - G_3 G_4)}}{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4) + G_2 G_3} \cdot \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{\cancel{(1 + G_1 G_2)}\cancel{(1 - G_3 G_4)}} \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4) + G_2 G_3} \end{aligned}$$

Als zweites wird die algebraische Zusammenfassung des Blockschaltbildes mit Hilfssignalen gezeigt. Hierzu werden die in Abb. 3 definierten Hilfssignale A, B und C aufgestellt.

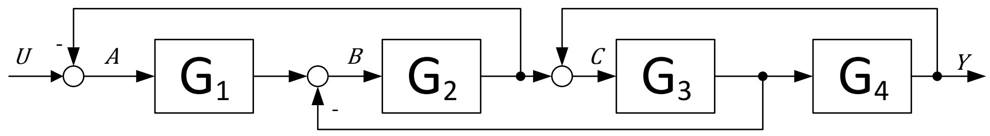


Abbildung 3: Definition der Hilfssignale

Daraus resultieren die folgenden Gleichungen

$$Y = G_4 G_3 C\,, \tag{1}$$

$$C = Y + G_2 B\,, \tag{2}$$

$$B = -G_3 C + G_1 A\,, \tag{3}$$

$$A = -G_2 B + U\,. \tag{4}$$

Gleichung (4) in (3) eingesetzt und aufgelöst nach B ergibt

$$B = -\frac{G_3}{1 + G_1 G_2} \cdot C + \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} \cdot U\,. \tag{5}$$

Gleichung (5) in (2) eingesetzt und aufgelöst nach C ergibt

$$C = \frac{1 + G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 + G_2 G_3} \cdot Y + \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 + G_2 G_3} \cdot U\,. \tag{6}$$

Schlussendlich (6) in (1) eingesetzt und nach Y aufgelöst führt auf die gesuchte Übertragungsfunktion

$$G = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4) + G_2 G_3}\,.$$

Lösung für das zweite Blockschaltbild folgt.

Aufgabe 2. Nickdämpfer
Gegeben ist das Blockschaltbild eines Nickdämpfers einer F16.

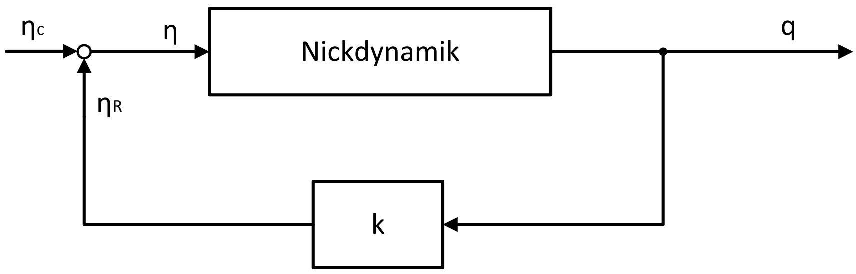


Abbildung 4: Nickdämpfer-Schaltung

Zur besseren Dämpfung einer Anstellwinkelschwingung werden Flugzeuge üblicherweise mit einem oben dargestellten Nickdämpfer versehen. Dabei wird die Nickrate q über eine Verstärkung k zurückgeführt und auf die von einem Piloten/Autopiloten vorgegebene Höhenruderstellung aufgeschaltet. Der Einfluss dieser Schaltung auf die Eigenschaften der Nickdynamik soll im Folgenden untersucht werden. Der erforderliche Teil der Nickdynamik einer F16 kann dabei näherungsweise mit der Übertragungsfunktion

$$G_{q\eta}(s) = \frac{q(s)}{\eta(s)} = \frac{-0,1137s - 0,0705}{s^2 + 1,5189s + 2,1303}$$

beschrieben werden.

Aufgaben

a) Berechnen Sie die Pol- und Nullstellen der gegebenen Übertragungsfunktion sowie deren Eigenfrequenz und Dämpfungsgrad.

b) Berechnen Sie nun die Eigenfrequenz und den Dämpfungsgrad des in der Aufgabe in Form eines Blockschaltbildes dargestellten Nickdämpfers in Abhängigkeit der Verstärkung k.

c) Der Verstärkungsfaktor k wird auf den Wert 5 gesetzt. Berechnen sie die Polstellen des Systems und vergleichen Sie diese sowie Frequenz und Dämpfungsgrad mit der ursprünglichen Nickdynamik.

Lösung Aufgabe 2.

a) Zählerpolynom:

$$-0,1137s - 0,0705 = 0$$
$$\Leftrightarrow s = -0,6201$$

Die Übertragungsfunktion besitzt eine Nullstelle bei $s = -0,6201$.

Nennerpolynom:

$$
\begin{aligned}
& s^2 + 1,5189s + 2,1303 = 0 \\
\Leftrightarrow & s = -\frac{1,5189}{2} \pm \sqrt{\frac{1,5189}{2}^2 - 2,1303} \\
\Leftrightarrow & s = -0,7594 \pm j \cdot 1,2464
\end{aligned}
$$

Die Übertragungsfunktion besitzt ein komplexes Polstellenpaar mit negativem Realteil. Das System ist daher stabil und das Übertragungsverhalten stellt eine gedämpfte Schwingung dar (siehe Übung 3).

bEigenfrequenz und Dämpfung: Koeffizientenvergleich liefert

$$
\begin{aligned}
\omega_0^2 &= 2,1303 \;\Rightarrow\; \omega_0 = 1.4596\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \\
2D\omega_0 &= 1,5189 \;\Rightarrow\; D = \frac{1,5189}{2\omega_0} = 0,52
\end{aligned}
$$

b) Zunächst muss die Rückkopplung zusammengefasst werden

$$
\begin{aligned}
& G_v(s) = k \cdot \frac{-0,1137s - 0,0705}{s^2 + 1,5189s + 2,1303}\,, \\
& G_r(s) = 1\,,
\end{aligned}
$$

und damit gilt auch $G_0(s) = G_v(s)$. Somit folgt für die Gesamtübertragungsfunktion (positive Rückkopplung!)

$$
G(s) = \frac{G_0(s)}{1 - G_0(s)}\,.
$$

Berechnung des Nenners der Gesamtübertragungsfunktion ergibt

$$
1 - G_0(s) = \frac{s^2 + (1,5189 + 0,1137k)s + (2,1303 + 0,0705k)}{s^2 + 1,5189s + 2,1303}\,.
$$

Damit folgt für die Gesamtübertragungsfunktion

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{-0,1137s - 0,0705}{\cancel{s^2 + 1,5189s + 2,1303}} \cdot \frac{\cancel{s^2 + 1,5189s + 2,1303}}{s^2 + (1,5189 + 0,1137k)s + (2,1303 + 0,0705k)} \\
&= \frac{-0,1137s - 0,0705}{s^2 + (1,5189 + 0,1137k)s + (2,1303 + 0,0705k)}\,.
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs können dann wieder Eigenfrequenz und Dämpfung bestimmt werden

$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= \sqrt{2,1303 + 0,0705k)} \\
2D\omega_0 &= 1,5189 + 0,1137k \;\Rightarrow\; D = \frac{1,5189 + 0,1137k}{2 \cdot \sqrt{2,1303 + 0,0705k}}
\end{aligned}
$$

Durch die Verstärkung k in der Rückführung kann also die Eigenfrequenz und Dämpfung der betrachteten Nickdynamik beeinflusst werden.

c) Von nun an gilt $k = 5$, somit ergibt sich für die Polstellen der Gesamtübertragungsfunktion

$$\begin{aligned}
&0 = s^2 + (1,5189 + 0,1137 \cdot 5)s + (2,1303 + 0,0705 \cdot 5) \\
\Leftrightarrow\ &0 = s^2 + 2,0874s + 2,4828 \\
\Leftrightarrow\ &s = -1,043 \pm j \cdot 1,1805\,.
\end{aligned}$$

Die Rückführung mit einer Verstärkung von $k = 5$ ergibt also eine Verschiebung der Polstellen. Mit den in b) berechneten Ausdrücken ergeben sich Eigenfrequenz und Dämpfung zu

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \sqrt{2,1303 + 0,0705 \cdot 5} = 1.5757\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \\
D &= \frac{1,5189 + 0,1137 \cdot 5}{2 \cdot \sqrt{2,1303 + 0,0705 \cdot 5}} = 0,66
\end{aligned}$$

Durch die positive Rückführung von einem $k = 5$ wird sowohl die Eigenfrequenz als auch die Dämpfung der betrachteten Dynamik vergrößert. Da dadurch die Anstellwinkelschwingung abgeschwächt wird, spricht man bei dem vorliegenden Regelkreis in der Flugregelung von einem Nickdämpfer.