

Übung 5 - Lösung

Thema: Laplace-Transformation

Aufgabe 1. Tankbehälter

Gegeben ist der in Abb. 1 dargestellte Tankbehälter aus Übung 3.) In der vorherigen Übung

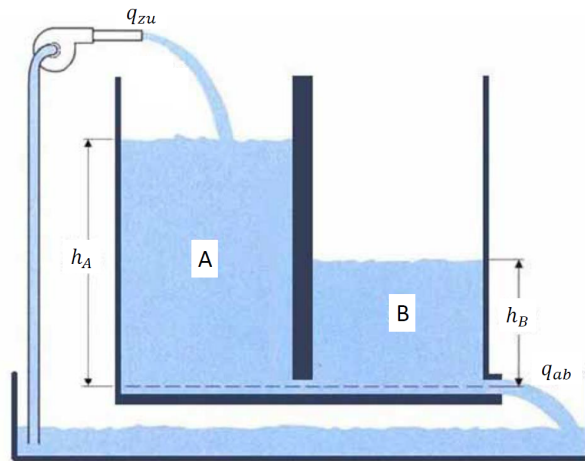


Abbildung 1: Zwei-Tank System

3 wurden die folgenden linearisierten Differentialgleichungen in der Ruhelage des Systems bei einem konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$ bestimmt. Die Δ in der linearisierten Differentialgleichung wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen

$$\begin{aligned}\dot{h}_A &= k_q \cdot q_{zu} + k_{A,1} \cdot h_A + k_{B,1} \cdot h_B \\ \dot{h}_B &= k_{A,2} \cdot h_A + k_{B,2} \cdot h_B\end{aligned}$$

Aufgaben

- Geben Sie eine Differentialgleichung an, die den Füllstand h_B in Abhängigkeit vom Zufluss q_{zu} beschreibt.
- Transformieren Sie beide gegebenen Differentialgleichungen in den Laplace-Bereich. Geben Sie einen Ausdruck für den Füllstand $H_B(s)$ in Abhängigkeit des Zuflusses an.

Hinweis Im folgenden gilt:

$$k_{A,1} = k_{B,1} = -2, k_{A,2} = k_{B,2} = 1, h_{A,0} = 2, h_{B,0} = 1$$

Aufgaben c) Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf des Füllstandes $h_B(t)$ der aus den gegebenen Anfangswerten für $h_{A,0}$ und $h_{B,0}$ resultiert. Es wird angenommen, dass keine zusätzliche Flüssigkeit in den Tank A fließt ($q_{zu} = 0$).

Lösung Aufgabe 1.

a) Es gilt die beiden Differentialgleichungen zu kombinieren, sodass die direkte Wirkung des Eingangs auf den Füllstand des Tanks B beschrieben wird.

Anmerkung Es werden die linearisierten Differentialgleichungen des Problems betrachtet, sprich es wird ein System mit einem konstanten Zufluss und Abfluss betrachtet, welches eingeschwungen ist (keine Dynamik mehr vorhanden). Die betrachteten Gleichungen beschreiben nur die Abweichungen von diesem eingeschwungenen Zustand!

Für den Füllstand des Tanks B gilt laut Aufgabenstellung

$$\dot{h}_B = k_{A,2} \cdot h_A + k_{B,2} \cdot h_B$$

Einmal differenzieren führt zu

$$\ddot{h}_B = k_{A,2} \cdot \dot{h}_A + k_{B,2} \cdot \dot{h}_B$$

Ersetzen von \dot{h}_A mit der Differentialgleichung des Tanks A

$$\ddot{h}_B = k_{A,2}k_q \cdot q_{zu} + k_{A,2}k_{A,1} \cdot h_A + k_{A,2}k_{B,1} \cdot h_B + k_{B,2} \cdot \dot{h}_B$$

Nun muss noch der h_A Term ersetzt werden. Umformen der Differentialgleichung des Tanks B ergibt

$$h_A = \frac{1}{k_{A,2}} \cdot \dot{h}_B - \frac{k_{B,2}}{k_{A,2}} \cdot h_B$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung von \ddot{h}_B ergibt

$$\ddot{h}_B = (k_{A,1} + k_{B,2}) \cdot \dot{h}_B + (k_{A,2}k_{B,1} - k_{A,1}k_{B,2}) \cdot h_B + k_{A,2}k_q \cdot q_{zu}$$

b) Zunächst gilt es alle zeitlich veränderlichen Größen in den beiden Differentialgleichung in den Laplace-Bereich (Bildbereich) zu überführen. Mit Hilfe des Laplacschen Differentiationsatzes ergibt sich

- $\dot{h}_A(t)$: $s \cdot H_A(s) - h_{A,0}$
- $\dot{h}_B(t)$: $s \cdot H_B(s) - h_{B,0}$
- $h_A(t)$: $H_A(s)$
- $h_B(t)$: $H_B(s)$
- $q_{zu}(t)$: $Q_{zu}(s)$

Diese Terme werden in die beiden Differentialgleichungen eingesetzt

$$s \cdot H_A(s) - h_{A,0} = k_q \cdot Q_{zu}(s) + k_{A,1} \cdot H_A(s) + k_{B,1} \cdot H_B(s), \quad (1)$$

$$s \cdot H_B(s) - h_{B,0} = k_{A,2} \cdot H_A(s) + k_{B,2} \cdot H_B(s), \quad (2)$$

womit sich die beiden Laplace-Transformierten der betrachteten Differentialgleichungen ergeben. Um einen Ausdruck für den Füllstand $H_B(s)$ in Abhängigkeit von $Q_{zu}(s)$ zu erhalten. Hierzu wird zunächst (1) nach $H_A(s)$ aufgelöst

$$\begin{aligned} H_A(s)(s - k_{A,1}) &= k_q \cdot Q_{zu}(s) + k_{B,1} \cdot H_B(s) + h_{A,0} \\ \Leftrightarrow H_A(s) &= \frac{k_q}{s - k_{A,1}} \cdot Q_{zu}(s) + \frac{k_{B,1}}{s - k_{A,1}} \cdot H_B(s) + \frac{h_{A,0}}{s - k_{A,1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Gleichermaßen wird (2) nach $H_B(s)$ aufgelöst

$$H_B(s)(s - k_{B,2}) = k_{A,2} \cdot H_A(s) + h_{B,0}. \quad (4)$$

Nun wird (3) in (4) eingesetzt

$$\begin{aligned} H_B(s)(s - k_{B,2}) &= \frac{k_q k_{A,2}}{s - k_{A,1}} \cdot Q_{zu}(s) + \frac{k_{B,1} k_{A,2}}{s - k_{A,1}} \cdot H_B(s) + \frac{h_{A,0} k_{A,2}}{s - k_{A,1}} + h_{B,0} \\ \Leftrightarrow H_B(s) \left[(s - k_{B,2}) - \frac{k_{B,1} k_{A,2}}{s - k_{A,1}} \right] &= \frac{k_q k_{A,2}}{s - k_{A,1}} \cdot Q_{zu}(s) + \frac{h_{A,0} k_{A,2} + h_{B,0}(s - k_{A,1})}{s - k_{A,1}} \end{aligned}$$

Weiter auflösen führt dann auf

$$H_B(s) \left[\frac{(s - k_{B,2})(s - k_{A,1}) - k_{B,1} k_{A,2}}{s - k_{A,1}} \right] = \frac{k_q k_{A,2}}{s - k_{A,1}} \cdot Q_{zu}(s) + \frac{h_{A,0} k_{A,2} + h_{B,0}(s - k_{A,1})}{s - k_{A,1}}$$

$$H_B(s) = \frac{k_q k_{A,2}(s - k_{A,1})}{(s - k_{A,1}) [(s - k_{B,2})(s - k_{A,1}) - k_{B,1} k_{A,2}]} \cdot Q_{zu}(s) + \frac{(s - k_{A,1}) [h_{A,0} k_{A,2} + h_{B,0}(s - k_{A,1})]}{(s - k_{A,1}) [(s - k_{B,2})(s - k_{A,1}) - k_{B,1} k_{A,2}]}$$

$$H_B(s) = \frac{k_q k_{A,2}}{(s - k_{B,2})(s - k_{A,1}) - k_{B,1} k_{A,2}} \cdot Q_{zu}(s) + \frac{h_{A,0} k_{A,2} + h_{B,0}(s - k_{A,1})}{(s - k_{B,2})(s - k_{A,1}) - k_{B,1} k_{A,2}} \quad (5)$$

Der Term (5) stellt dann nicht nur den Term dar der den Füllstand $H_B(s)$ beschreibt, sondern gleichzeitig auch die Lösung der Differentialgleichung im Laplace-Bereich.

- c) Der in b) erhaltene Ausdruck für $H_B(s)$ in (5) soll nun in den Zeitbereich zurück transformiert werden. Es ist also die Lösung der Differentialgleichung im Zeitbereich gesucht. Es gilt laut Aufgabenstellung, dass keine weitere Flüssigkeit in den Tank A fließt. Somit gilt $Q_{zu}(s) = 0$ und (5) vereinfacht sich zu

$$H_B(s) = \frac{h_{A,0}k_{A,2} + h_{B,0}(s - k_{A,1})}{(s - k_{B,2})(s - k_{A,1}) - k_{B,1}k_{A,2}}. \quad (6)$$

Setzt man in (6) die Angaben aus der Aufgabenstellung ein ergibt sich

$$\begin{aligned} H_B(s) &= \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (s - (-2))}{(s - 1)(s - (-2)) - (-2) \cdot 1} \\ &= \frac{2 + s + 2}{(s - 1)(s + 2) + 2} \\ &= \frac{s + 4}{s^2 + 2s - s - 2 + 2} \\ &= \frac{s + 4}{s^2 + s} \\ &= \frac{s + 4}{s(s + 1)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Der in (7) erhaltene Term stellt damit die homogene Lösung der Differentialgleichung im Laplace-Bereich dar. Da dieser Term der Korrespondenz Nr. 11 in der Laplace Korrespondenz-Tabelle entspricht, kann der zeitliche Verlauf des Füllstandes $h_B(t)$ in diesem Fall direkt aufgeschrieben werden

$$H_B(s) = \frac{s + 4}{s(s + 1)} \quad \rightarrow \quad h_B(t) = \frac{4}{1} - \frac{1 - 4}{1} \cdot e^{-1 \cdot t} = 4 - 3 \cdot e^{-t}$$

Aufgabe 2. Elektrischer Hubmagnet

Gegeben sei das System des elektrischen Hubmagneten aus Übung 2.) Es gelten die gleichen

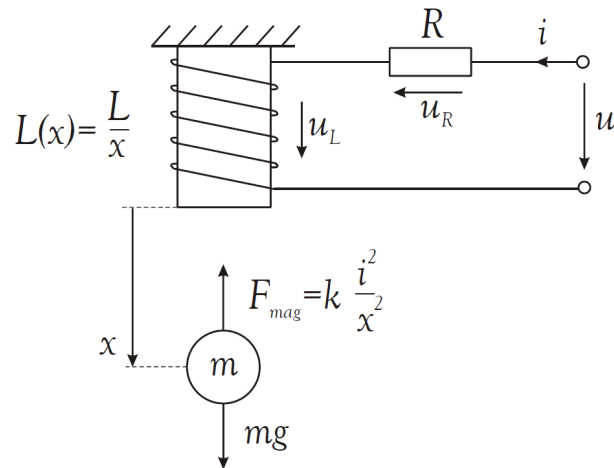


Abbildung 2: Elektrischer Hubmagnet

Angaben wie in Übung 2.). Außerdem sind aus der Aufgabe die folgenden linearisierten Differentialgleichungen in einer Ruhelage mit der konstanten Spannung $u_0 \geq 0$ bekannt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial i}{\partial t} &= k_{i,1} \cdot i + k_u \cdot u \\ \ddot{x} &= k_x \cdot x - k_{i,2} \cdot i\end{aligned}$$

Hinweis Die Δ wurden in der Gleichung aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen

Aufgaben

- Transformieren Sie die beiden Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Bildbereich
- Geben Sie die Übertragungsfunktion des Systems mit dem Eingang $U(s)$ und dem Ausgang $X(s)$ an

Lösung Aufgabe 2.

a) Beide Differentialgleichungen sollen mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Bildbereich überführt werden. Zunächst wird das elektrische Teilsystem betrachtet. Mit Hilfe des Laplaceschen Differentiationssatzes unter Vernachlässigung der Anfangswerte ergibt sich für diese Differentialgleichung

- $\frac{di(t)}{dt}$: $s \cdot I(s)$
- $i(t)$: $I(s)$
- $u(t)$: $U(s)$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt

$$s \cdot I(s) = k_{i,1} \cdot I(s) + k_u \cdot U(s).$$

Nach $I(s)$ auflösen führt dann zur gewünschten Laplace-Transformierten der Differentialgleichung

$$I(s)(s - k_{i,1}) = k_u \cdot U(s)$$

$$\Leftrightarrow I(s) = \frac{k_u}{s - k_{i,1}} \cdot U(s).$$

Gleiches gilt es für die Differentialgleichung des mechanischen Teilsystems durchzuführen. Mit Hilfe des Laplaceschen Differentiationssatzes unter Vernachlässigung der Anfangswerte ergibt sich hier

- $\ddot{x}(t)$: $s^2 \cdot X(s)$
- $x(t)$: $X(s)$
- $i(t)$: $I(s)$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$s^2 \cdot X(s) = k_x \cdot X(s) - k_{i,2} \cdot I(s).$$

Anschließend gilt es, die Gleichung ebenfalls nach $X(s)$ umzustellen

$$X(s)(s^2 - k_x) = -k_{i,2} \cdot I(s)$$

$$\Leftrightarrow X(s) = -\frac{k_{i,2}}{s^2 - k_x} \cdot I(s).$$

- b) Da durch die Laplace-Transformation beide Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen überführt werden konnten, kann die Übertragungsfunktion des Systems von Eingang $U(s)$ auf den Ausgang $X(s)$ durch simples in einander einsetzen bestimmt werden.

$$X(s) = -\frac{k_{i,2}}{s^2 - k_x} \cdot \left(\underbrace{\frac{k_u}{s - k_{i,1}} \cdot U(s)}_{I(s)} \right)$$

$$\Leftrightarrow X(s) = -\frac{k_{i,2}k_u}{(s^2 - k_x)(s - k_{i,1})} \cdot U(s)$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \underbrace{\frac{-k_{i,2}k_u}{(s^2 - k_x)(s - k_{i,1})}}_{\text{Übertragungsfunktion}} \cdot U(s).$$

Der Zusammenhang zwischen dem Eingangssignal $U(s)$ und dem Ausgangssignal $X(s)$ wird durch die Übertragungsfunktion (wird in der Regel mit $G(s)$ bezeichnet) beschrieben. Diese entspricht der partikulären Lösung im Zeitbereich.

Aufgabe 3. Lineare Übertragungsglieder

Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen:

$$T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$$

$$\ddot{y}(t) + 2D\omega_0 \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = K \cdot u(t)$$

$$T_1 \cdot \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K \cdot u(t)$$

$$T_1 \cdot \ddot{y}(t) + T_2 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K(u(t) + T_D \cdot \dot{u}(t))$$

Aufgabe Stellen Sie die Übertragungsfunktionen der vier Differentialgleichungen im eingeschwingenen Zustand mit Hilfe der Laplace-Transformation auf. Klassifizieren Sie anschließend deren Übertragungsverhalten.

Lösung Aufgabe 3.

(i) Die Differentialgleichung $T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$ führt zu

$$\begin{aligned} T_1 \cdot s \cdot Y(s) + Y(s) &= K \cdot U(s) \\ \Leftrightarrow Y(s) \cdot [T_1 \cdot s + 1] &= K \cdot U(s) \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \underbrace{\frac{1}{T_1 \cdot s + 1}}_{G(s)} \cdot U(s). \end{aligned}$$

Dieses Übertragungsverhalten wird auch als PT₁-Verhalten bezeichnet. Die Übertragungsfunktion besitzt genau eine Polstelle bei $s = -1/T_1$.

(ii) Die Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 2D\omega_0 \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = K \cdot u(t)$ führt zu

$$\begin{aligned} s^2 \cdot Y(s) + 2D\omega_0 \cdot s \cdot Y(s) + \omega_0^2 \cdot Y(s) &= K \cdot U(s) \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \underbrace{\frac{K}{s^2 + 2D\omega_0 \cdot s + \omega_0^2}}_{G(s)} \cdot U(s). \end{aligned}$$

Dieses Übertragungsverhalten wurde bereits in Übung 3. vorgestellt und wird als PT₂-Verhalten bezeichnet, in diesem Fall die schwingungsfähige Variante (zwei komplexe Polstellen – komplexes Polstellenpaar).

(iii) Die Differentialgleichung $T_1 \cdot \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K \cdot u(t)$ führt zu

$$\begin{aligned} T_1 \cdot s^2 \cdot Y(s) + s \cdot Y(s) &= K \cdot U(s) \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \underbrace{\frac{K}{s(1 + T_1 \cdot s)}}_{G(s)} \cdot U(s) \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \underbrace{\frac{1}{s} \cdot \frac{K}{1 + T_1 \cdot s}}_{G(s)} \cdot U(s). \end{aligned}$$

Dieses Übertragungsverhalten besteht aus einer Reihenschaltung eines Integrators (I) und eines PT_1 -Verhaltens. Diese Kombination wird auch IT_1 -Verhalten bezeichnet. Neben der Polstelle des PT_1 besitzt dieses System zusätzlich noch eine Polstelle im Ursprung ($s = 0$).

(iv) Die Differentialgleichung $T_1 \cdot \ddot{y}(t) + T_2 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K(u(t) + T_D \cdot \dot{u}(t))$ führt zu

$$\begin{aligned} T_1 \cdot s^2 \cdot Y(s) + T_2 \cdot s \cdot Y(s) + Y(s) &= K(U(s) + T_D \cdot s \cdot U(s)) \\ \Leftrightarrow Y(s) [T_1 \cdot s^2 + T_2 \cdot s + 1] &= U(s) \cdot K [1 + T_D \cdot s] \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \underbrace{\frac{K [1 + T_D \cdot s]}{T_1 \cdot s^2 + T_2 \cdot s + 1}}_{G(s)} \cdot U(s) = K (1 + T_D \cdot s) \cdot \frac{1}{T_1 \cdot s^2 + T_2 \cdot s + 1} \cdot U(s). \end{aligned}$$

Bei diesem System liegt ein PT_2 -Verhalten (Nenner) in Kombination (Reihenschaltung) mit einem PD-Verhalten (Zähler) vor. Das PD-Verhalten beschreibt ein differenzierendes Verhalten (D) zusammen mit einer statischen Verstärkung (P). Es wird auch PDT_2 -Verhalten genannt. Neben den beiden Nullstellen des PT_2 besitzt dieses System zusätzlich noch eine Nullstelle.

Aufgabe 4. Zusammenfassen von Blockschaltbildern

Gegeben ist das folgende System in Blockschaltbild-Form

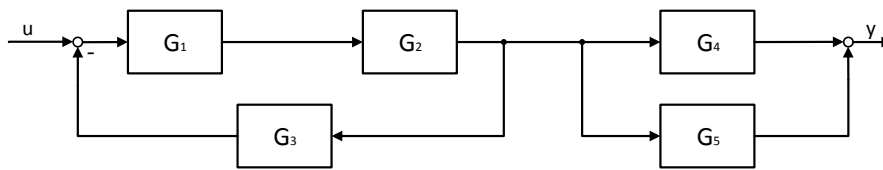


Abbildung 3: Blockschaltbild

mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_1(s) - G_5(s)$.

Aufgabe Fassen Sie das oben aufgeführte System zu einer Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ zusammen. Verwenden Sie hierzu die Gesetze zum Zusammenfassen von Reihen- und Parallelschaltungen sowie Rückkopplungen.

Lösung Aufgabe 4.

Das Problem soll mit der Anwendung der eingeführten Regeln zum Zusammenfassen von Reihen- und Parallelschaltungen gelöst werden. Im System befindet sich, wie in Abb. 4 dargestellt, jeweils eine Reihen- und eine Parallelschaltung.

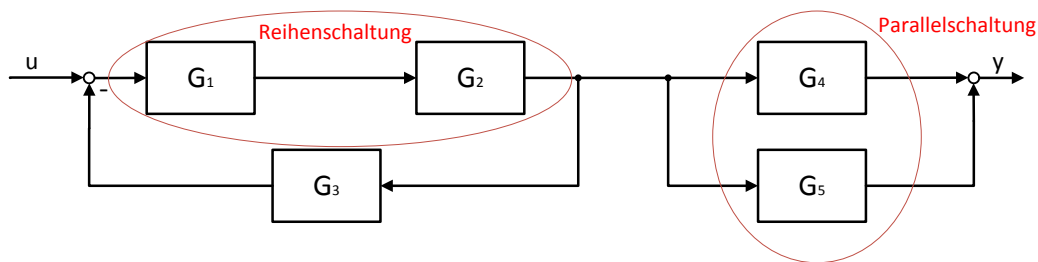


Abbildung 4: Zusammenfassung des Blockschaltbilds

Damit ergibt sich das in Abb. 5 dargestellte, neue Blockschaltbild.

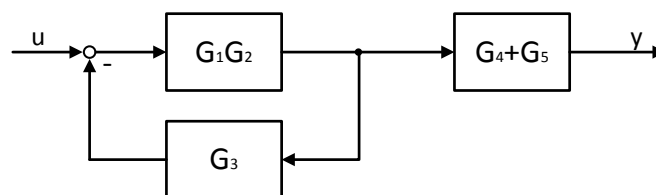


Abbildung 5: Zusammenfassung der Reihen- und Parallelschaltungen

Die Rückkopplung lässt sich nun noch mit der entsprechenden Gesetzmäßigkeit wie folgt zusammenfassen

$$G_R(s) = \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)},$$

wodurch sich eine weitere Reihenschaltung aus $G_R(s)$ und der vorher zusammengefassten Parallelschaltung $G_4(s) + G_5(s)$ ergibt, wie in Abb. 6 dargestellt ist.

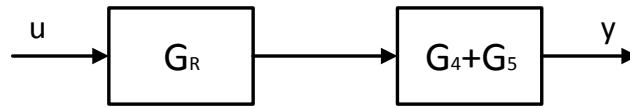


Abbildung 6: Finale Reihenschaltung

Daraus resultiert schlussendlich die gewünschte Zusammenfassung des Blockschaltbildes $G(s)$
zu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot (G_4 + G_5)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)}.$$