6. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

Blockschaltbild-Algebra, Aktive Beeinflussung von Systemverhalten, Stabilität

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Ergänzung zur Matrix-Exponentialfunktion

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad \text{dreifachen EW } \lambda = 2$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$e^{Jt} \rightarrow$ nicht mehr einfach berechenbar

Transformationsmatrix erf.

Genau der Fall einer nilpotenten Matrix

$$e^{At} = e^{\lambda t} \cdot e^{(A-\lambda I)t} \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$$

Ergänzung zur Matrix-Exponentialfunktion

Hauptvektoren benötigt

$$\underbrace{(A-\lambda I)}_{\tilde{B}}$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Kern $\tilde{B} = \tilde{v}_1$

$$\tilde{B}\tilde{v}_1 = 0 \longleftarrow \tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Kern $\tilde{B}^2 = \tilde{v}_2$

$\tilde{v}_2 \notin$ Kern $\tilde{B}$

$$\tilde{B}^2\tilde{v}_2 = 0 \longleftarrow \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}^3 = \tilde{B}^2 \cdot \tilde{B} = 0$$

Kern $\tilde{B}^3 = \tilde{v}_3$

$\tilde{v}_3 \in$ Kern $\tilde{B}^2$

$$\tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ergänzung zur Matrix-Exponentialfunktion

$$T = \begin{pmatrix} \tilde{B}^2 \tilde{v}_3 & \tilde{B}\tilde{v}_3 & \tilde{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

aus vorherigen Übung

$$e^{At} = T\, e^{Jt}\, T^{-1}$$

$$= \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{T} \overbrace{\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t}t & \frac{1}{2}e^{2t}t^2 \\ 0 & e^{2t} & e^{2t}t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}}^{e^{Jt}} \overbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{T^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t}(t+1) & e^{2t}t(t+4) & e^{2t}t(t+3) \\ -e^{2t}t & -e^{2t}(t^2+2t-1) & -e^{2t}t(t+1) \\ e^{2t}t & e^{2t}t(t+2) & e^{2t}(t^2+t+1) \end{pmatrix}$$

Ergänzung zur Matrix-Exponentialfunktion

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = (\lambda+3)(\lambda-1)^2 \longrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_{2,3} = 1 \end{array}$$

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \tilde{A}_2$$

$$e^{Jt} = \operatorname{diag}\left(e^{-3t}, e^{\tilde{A}_2 t}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} e^{-3t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$e^{\tilde{A}_2 t}$}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

$$e^{A_2 t} = T e^{Jt} T^{-1}$$

Ergänzung zur Matrix-Exponentialfunktion

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \tilde{A}_2 - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{A_2 t} = e^{1t} e^{Nt}$$

$$= e^{t} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e^{t} & te^{t} \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

$$e^{Jt} = \left(\begin{array}{c|cc} e^{-3t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & e^{t} & te^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{array} \right)$$

Ergänzung zur Matrix-Exponentialfunktion

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & \tilde{B}\tilde{v}_2 & \tilde{v}_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = A - \overset{\lambda = 1}{\lambda} I$$

$$\ker \tilde{B} = \tilde{v}_1 \quad \rightarrow \tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\ker \tilde{B}^2 = \tilde{v}_2 \quad \tilde{v}_2 \notin \ker \tilde{B}$$

$$\rightarrow \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -3$$

$$(\lambda_1 I - A) v_1 = 0 \quad \longleftarrow \text{Eigenvektor von } \lambda_1 = -3$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ergänzung zur Matrix-Exponentialfunktion

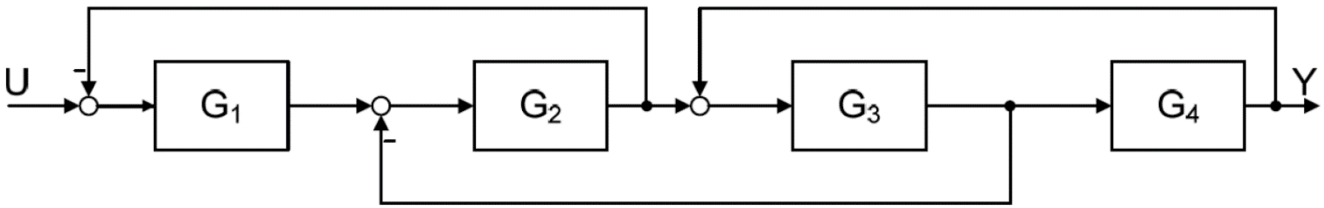
$$T = \begin{pmatrix} v_1 & \tilde{B}\tilde{v}_2 & \tilde{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{A_2 t} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{T} \overbrace{\begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & te^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}}^{e^{Jt}} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}^{T^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & \frac{1}{2}\left(e^{-3t} - e^{-t}\right) \\ -2te^{t} & e^{t} & te^{t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Zusammenfassen von Blockschaltbildern

Gegeben ist das folgende Blockschaltbild

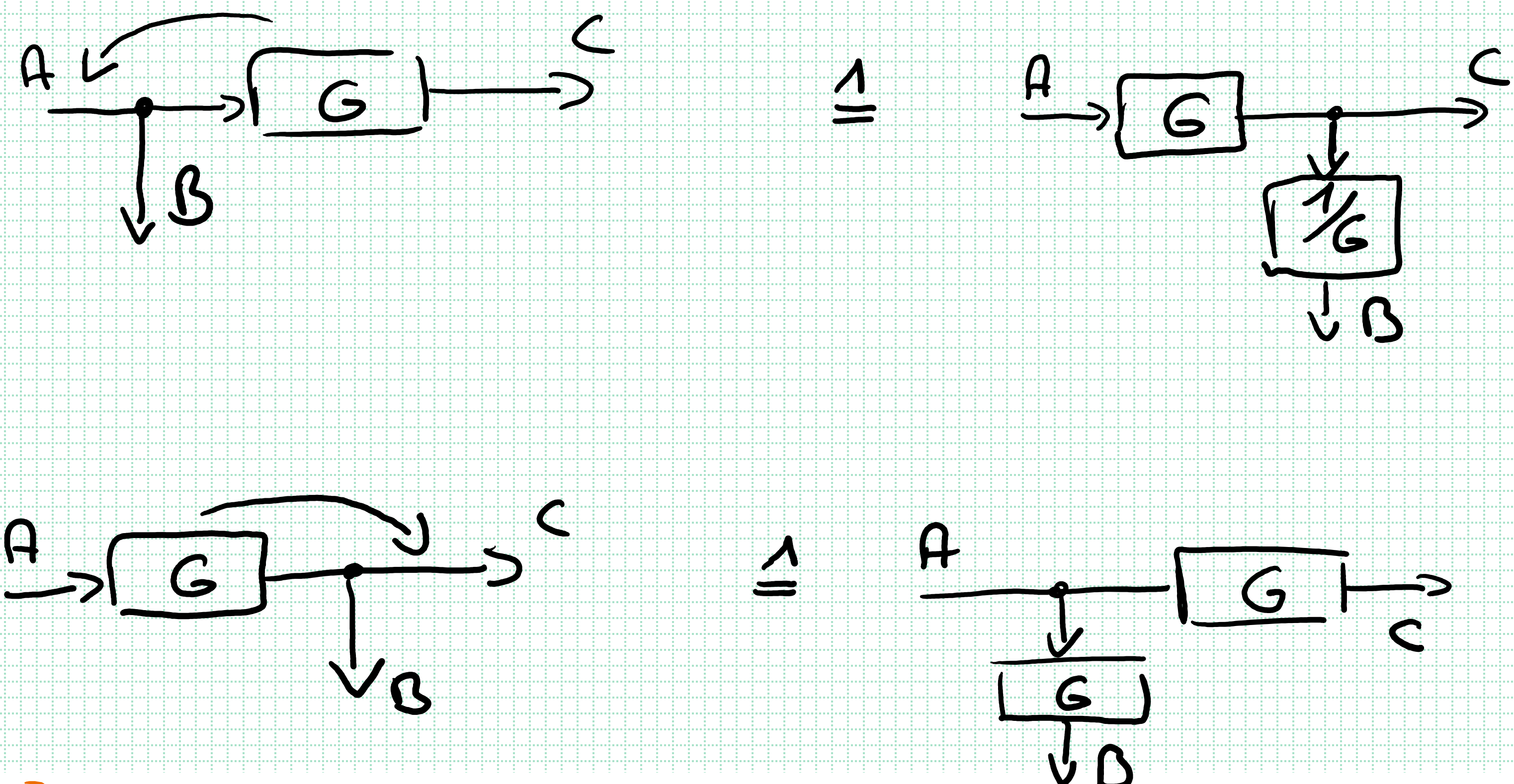


mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_1(s) - G_4(s)$

Aufgabe: Fassen Sie das oben aufgeführte System zu einer Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ zusammen.

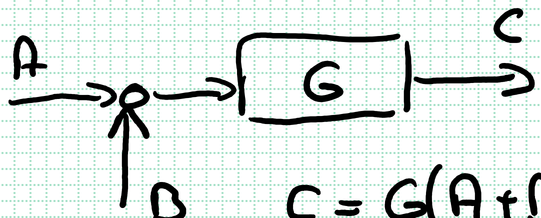
Aufgabe 4: Tricks beim Zusammenfassen (Verschieben)

Verzweigung



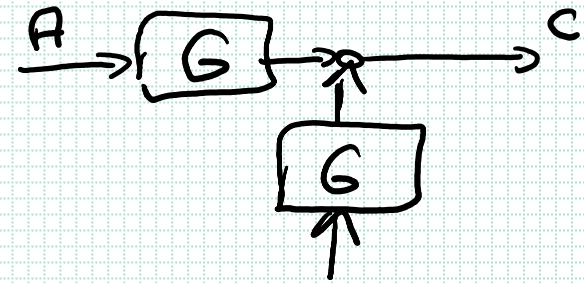
Aufgabe 4: Tricks beim Zusammenfassen

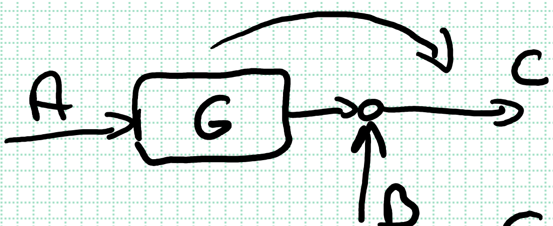
Summation



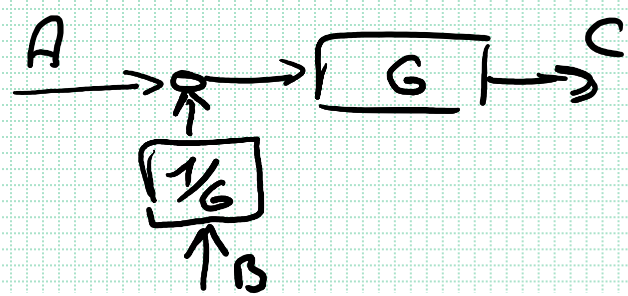
$$C = G(A+B)$$
$$= GA + GB$$

$\hat{=}$



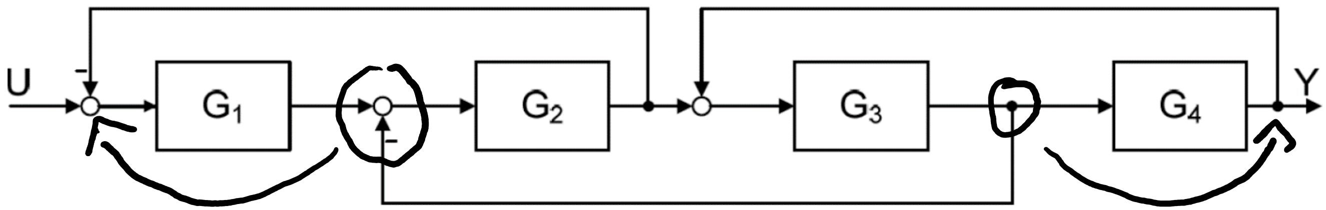


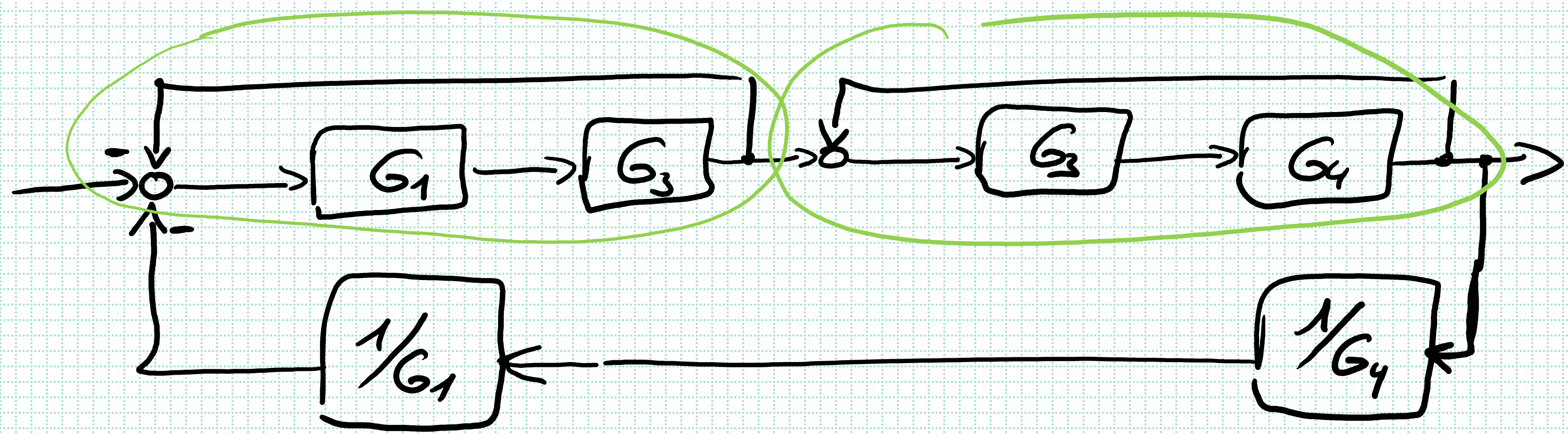
$\hat{=}$



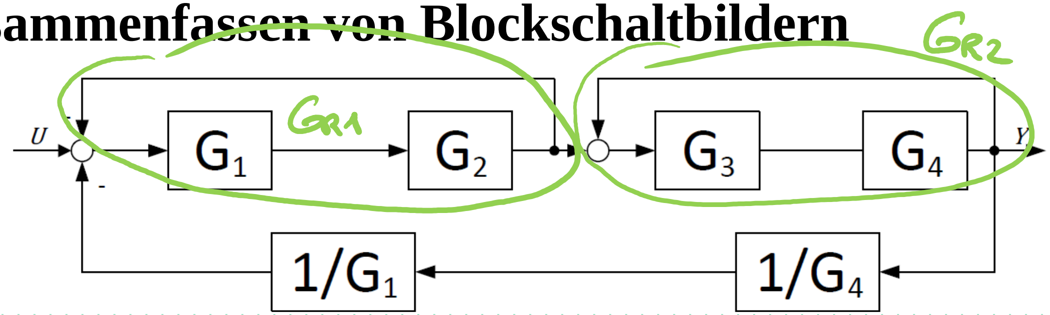
$$C = GA + B$$
$$C = G\left(A + \frac{1}{G}B\right)$$

Aufgabe 1: Zusammenfassen von Blockschaltbildern





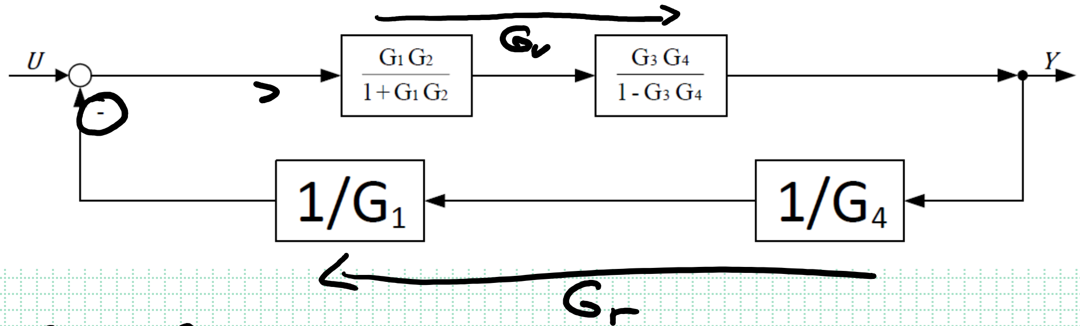
Aufgabe 1: Zusammenfassen von Blockschaltbildern



$$G_{R1} = \frac{G_v}{1 + G_v G_r} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2}$$

$$G_{R2} = \frac{G_v}{1 - G_v G_r} = \frac{G_3 G_4}{1 - G_3 G_4}$$

Aufgabe 1: Zusammenfassen von Blockschaltbildern



$$G = \frac{G_v}{1 + \underbrace{G_v G_r}_{G_0}}$$

offenen Regelkreis

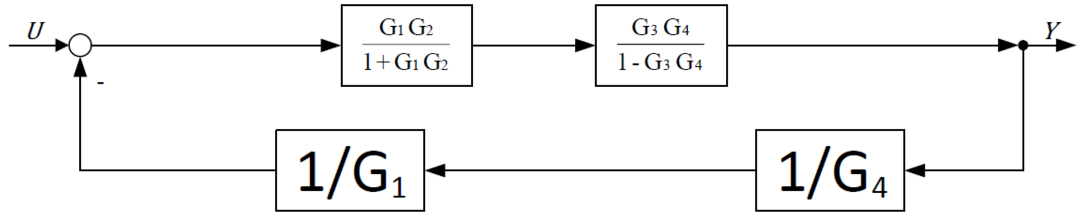
$$G_v = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{(1+G_1G_2)(1-G_3G_4)}$$

$$G_r = \frac{1}{G_1 \cdot G_4}$$

$$G_0 = G_v G_r = \frac{G_2 G_3}{(1+G_1 G_2)(1-G_3G_4)}$$

$$1 + G_0 = \frac{(1+G_1G_2)(1-G_3G_4)}{(1+G_1G_2)(1-G_3G_4)} + \frac{G_2 G_3}{(1+G_1G_2)(1-G_3G_4)}$$

Aufgabe 1: Zusammenfassen von Blockschaltbildern



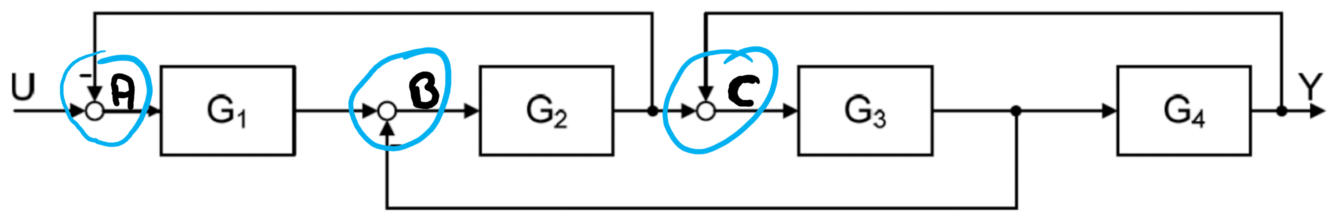
$$1 + G_0 = \frac{(1+G_1G_2)(1-G_3G_4)+G_2G_3}{(1+G_1G_2)(1-G_3G_4)}$$

$$G = \frac{G_v}{1+G_0} = \frac{\cancel{(1+G_1G_2)(1-G_3G_4)}}{(1+G_1G_2)(1-G_3G_4)+G_2G_3} \cdot \frac{G_1G_2G_3G_4}{\cancel{(1+G_1G_2)(1-G_3G_4)}}$$

$$= \frac{G_1G_2G_3G_4}{(1+G_1G_2)(1-G_3G_4)+G_2G_3}$$

Aufgabe 1: Zusammenfassen von Blockschaltbildern

Hilfssignale



1

$$Y = G_3 \cdot G_4\, C \qquad (1)$$

$$C = Y + G_2 B \qquad (2)$$

$$B = G_1 A - C \cdot G_3 \qquad (3)$$

$$A = u - G_2 B \qquad (4)$$

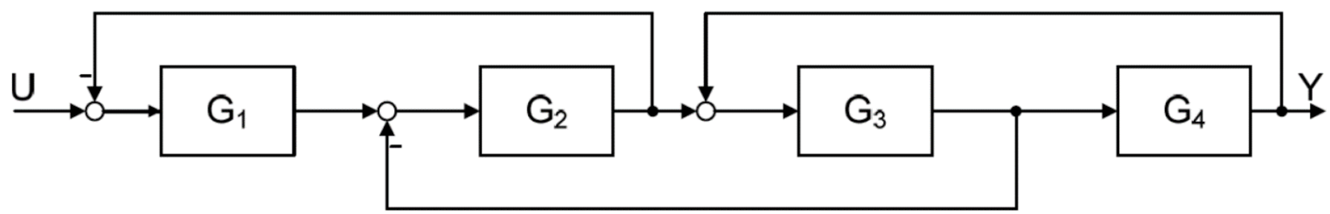
(4) in (3): $B = -G_3 C + G_1 (U - G_2 B)$

$\vdots$

$$B = -\frac{G_3}{1+G_1G_2}\, C + \frac{G_1}{1+G_1G_2}\, u$$

in (2): $C = Y - \frac{G_2 G_3}{1+G_1G_2}\, C + \frac{G_2 G_1}{1+G_1G_2}\, u$

Aufgabe 1: Zusammenfassen von Blockschaltbildern



nach C auflösen:

$$C = \frac{1 + G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 + G_2 G_3} Y + \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 + G_2 G_3} \cdot u$$

In (1):

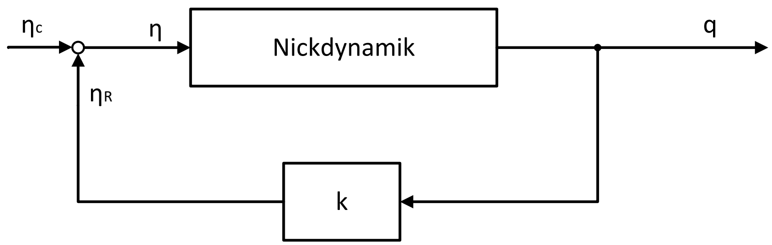
$$Y = \frac{G_3 G_4 (1 + G_1 G_2)}{1 + G_1 G_2 + G_2 G_3} Y + \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_1 G_2 + G_2 G_3} u$$

$$\Longleftrightarrow \quad Y = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4) + G_2 G_3} \cdot u$$

G

Aufgabe 2: Nickdämpfer

Gegeben ist das Blockschaltbild eines Nickdämpfers einer F16



Zur besseren Dämpfung einer Anstellwinkelschwingung werden Flugzeuge üblicherweise mit einem oben dargestellten Nickdämpfer versehen. Der Einfluss dieser Schaltung auf die Eigenschaften der Nickdynamik soll im Folgenden untersucht werden.

Der erforderliche Teil der Nickdynamik einer F16 kann dabei näherungsweise mit der Übertragungsfunktion beschrieben werden.

$$G_{q\eta}(s) = \frac{q(s)}{\eta(s)} = \frac{-0{,}1137s - 0{,}0705}{s^2 + 1{,}5189s + 2{,}1303}$$

Aufgabe 2: Nickdämpfer

- Allgemeines zur Anstellwinkelschwingung (auch alpha-Schwingung)
- Schnelle Hub-Nick-Schwingung (Schwingung um y-Achse)

- Tritt als Antwort auf Höhenrudereingaben und äußeren Störungen um die y-Achse auf (vertikale Böen beispielsweise)
- Äußerst sich besonders stark in der Nickrate q

- Durch Regelung lässt sich diese Schwingung künstlich beeinflussen
- Aktive beeinflussung von Systemeigenschaften (Regelung)

- Rückkopplung der Nickrate auf das Höhenruder
- Proportionale Rückführung (P-Regler)

Aufgabe 2: Nickdämpfer

Aufgaben:

a) Berechnen Sie die Pol- und Nullstellen der gegebenen Übertragungsfunktion, sowie deren Eigenfrequenz und Dämpfungsgrad.

b) Berechnen Sie die Eigenfrequenz und den Dämpfungsgrad des in der Aufgabe in Form eines Blockschaltbildes dargestellten Nickdämpfers in Abhängigkeit der Verstärkung k.

c) Der Verstärkungsfaktor k wird auf den Wert 5 gesetzt. Berechnen sie die Polstellen des Systems und vergleichen Sie diese, sowie dessen Frequenz und Dämpfungsgrad mit der ursprünglichen Nickdynamik.

Aufgabe 1: Nickdämpfer

Aufgabe: a) Berechnen Sie die Pol- und Nullstellen der gegebenen Übertragungsfunktion, sowie deren Eigenfrequenz und Dämpfungsgrad.

$$G_{q\eta}(s) = \frac{q(s)}{\eta(s)} = \frac{-0{,}1137s - 0{,}0705}{s^2 + 1{,}5189s + 2{,}1303}$$

Nullstellen: Zähler $-0{,}1137s - 0{,}0705 = 0$

$$\underline{\underline{s = -0{,}6201}}$$

Polstellen: Nenner $s^2 + 1{,}5189s + 2{,}1303 = 0$

$$s = -\frac{1{,}5189}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1{,}5189}{2}\right)^2 - 2{,}1303}$$

$$\underline{\underline{s = -0{,}7594 \pm j\,1{,}2464}}$$ $\longrightarrow$ schwingungsfähig

Aufgabe 2: Nickdämpfer

Aufgabe: a) Berechnen Sie die Pol- und Nullstellen der gegebenen Übertragungsfunktion, sowie deren Eigenfrequenz und Dämpfungsgrad.

Eigenfreq

$$G_{q\eta}(s) = \frac{q(s)}{\eta(s)} = \frac{-0{,}1137s - 0{,}0705}{s^2 + 1{,}5189s + 2{,}1303} \longrightarrow \text{Nenner eines } PT_2$$

$$s^2 + 2D\omega_0 + \omega_0^2$$

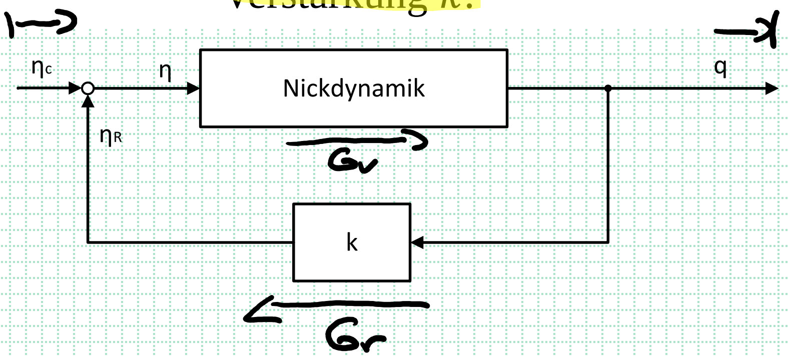
Dämpfungsgrad

$$\omega_0 = \sqrt{2{,}1303} = \underline{\underline{1{,}4596}} \; (\mathrm{rad/s})$$

$$2D\omega_0 = 1{,}5189 \longrightarrow D = \frac{1{,}5189}{2\omega_0} = \underline{0{,}52}$$

Aufgabe 2: Nickdämpfer

Aufgabe: b) Berechnen Sie die Eigenfrequenz und den Dämpfungsgrad des in der Aufgabe in Form eines Blockschaltbildes dargestellten Nickdämpfers in Abhängigkeit der Verstärkung k.



$$G_0(s) = G_v(s)\,G_r(s)$$

$$= k \cdot \frac{-0{,}1137s - 0{,}0705}{s^2 + 1{,}5189s + 2{,}1303}$$

$$G(s) = \frac{G_v(s)}{1 - G_0(s)}$$

$$1 - G_0(s) = \frac{s^2 + 1{,}5189s + 2{,}1303}{s^2 + 1{,}5189s + 2{,}1303} - G_0(s)$$

$$= \frac{s^2 + (1{,}5189 - 0{,}1137k)s + 2{,}1303 - 0{,}0705k}{s^2 + 1{,}5189s + 2{,}1303}$$

Aufgabe 2: Nickdämpfer

Aufgabe: b) Berechnen Sie die Eigenfrequenz und den Dämpfungsgrad des in der Aufgabe in Form eines Blockschaltbildes dargestellten Nickdämpfers in Abhängigkeit der Verstärkung k.

$$G(s) = \underbrace{\frac{-0{,}1137s - 0{,}0705}{\cancel{s^2+1{,}5189s+2{,}1303}}}_{G_0(s)} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{s^2+1{,}5189s+2{,}1303}}{s^2+(1{,}5189-0{,}1137k)s+2{,}1303-0{,}0705k}}_{\frac{1}{1-G_0(s)}}$$

$$= \frac{-0{,}1137s - 0{,}0705}{s^2+(1{,}5189-0{,}1137k)s+2{,}1303-0{,}0705k} \qquad \eta_c \to \boxed{G(s)} \to q$$

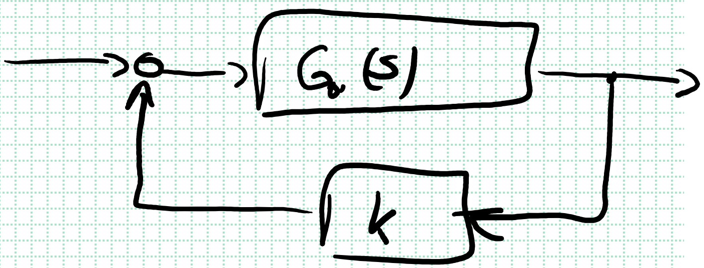
Aufgabe 2: Nickdämpfer

Aufgabe: b) Berechnen Sie die Eigenfrequenz und den Dämpfungsgrad des in der Aufgabe in Form eines Blockschaltbildes dargestellten Nickdämpfers in Abhängigkeit der Verstärkung k.

Nenner $N(s) = s^2 + \underbrace{(1{,}5189 + 0{,}1137k)}_{2D\omega_0} s + \underbrace{(2{,}1303 + 0{,}0705k)}_{\omega_0^2}$

$$\omega_0 = \sqrt{2{,}1303 + 0{,}0705k}$$

$$D = \frac{1{,}5189 + 0{,}1137k}{2\sqrt{2{,}1303 + 0{,}0705k}}$$



Aufgabe 2: Nickdämpfer

Aufgabe: c) Der Verstärkungsfaktor k wird auf den Wert 5 gesetzt. Berechnen sie die Polstellen des Systems und vergleichen Sie diese, sowie dessen Frequenz und Dämpfungsgrad mit der ursprünglichen Nickdynamik.

$k = 5$

Nenner $N(s) = s^2 + (1{,}5189 + 0{,}1137 \cdot 5) + (2{,}1303 + 0{,}0705 \cdot 5)$

$= s^2 + 2{,}0874\,s + 2{,}4828$

Nullstellen des Nenners $\longrightarrow$ Polstellen

$s = -1{,}043 \pm j\,1{,}1805$

vorher:

$s = -0{,}7584 \pm j \cdot 1{,}2464$

Aufgabe 2: Nickdämpfer

Aufgabe: c) Der Verstärkungsfaktor k wird auf den Wert 5 gesetzt. Berechnen sie die Polstellen des Systems und vergleichen Sie diese, sowie dessen Frequenz und Dämpfungsgrad mit der ursprünglichen Nickdynamik.

$$D = \frac{1{,}5189 + 0{,}1137 \cdot 5}{2\sqrt{2{,}1303 + 0{,}0705 \cdot 5}} = 0{,}66$$

↳ gewünschtes D einstellbar

vorher $D = 0{,}52$

$$\omega_0 = \ldots = 1{,}5757 \quad (\mathrm{rad}/s)$$

vorher $\omega_0 = 1{,}4596 \ (\mathrm{rad}/s)$

Aufgabe 2: Nickdämpfer

Wanderung der Polstellen durch die Regelung