5. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

Laplace-Transformation, Übertragungsfunktionen

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Nachtrag aus Übung 4.)

$$\phi(t) = e^{At}$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix}}_{} x + u(t) \qquad u(t) = 0$$

$$x \in \mathbb{R}^2 \longleftrightarrow z = x_1 + i x_2 \in \mathbb{C}^1$$

$$\begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma x_1 + \omega x_2 \\ -\omega x_1 - \gamma x_2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \gamma x_1 + \omega x_2 - i(\omega x_1 + \gamma x_2)$$

$$= (-\gamma - i\omega)\underbrace{(x_1 + i x_2)}_{z}$$

$$\Downarrow$$

$$z(t) = e^{-(\gamma + i\omega)t} z_0 \longrightarrow \dot{z} = (-\gamma - i\omega) z$$

$$\dot{\phi} = A\phi \qquad \phi(0) = I$$

---

1. Spalte:

$$\phi_1(0) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \longrightarrow z(0) = 1 + i \cdot 0 = 1 = z_0$$

$$z(t) = e^{-(\gamma + i\omega)t} \cdot 1 = e^{-\gamma t} \cdot e^{-i\omega t}$$

$$e^{-i\omega t} = \underset{\uparrow\, x_1}{\cos(\omega t)} - i \cdot \underset{\uparrow\, x_2}{\sin(\omega t)}$$

$$\phi_1(t) = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Nachtrag aus Übung 4.)

2. Spalte: $\phi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \quad \longleftrightarrow \quad z(0) = 0 + i \cdot 1 = i =: z_0$

$$z(t) = e^{-(\gamma + i\omega)t} \cdot i = e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} \cdot i = e^{-\gamma t} \cdot i \left(\cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \right)$$

$$= e^{-\gamma t} \left(i \cdot \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \right)$$

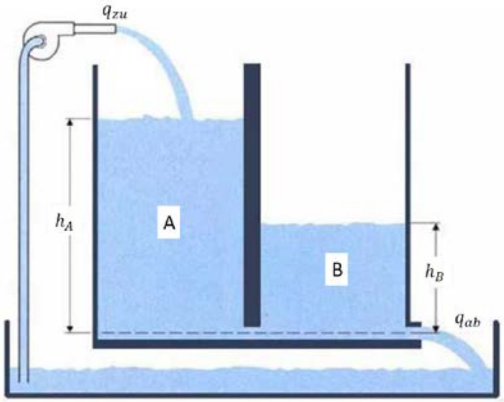
$$= e^{-\gamma t} \big(\underbrace{\sin(\omega t)}_{x_1} + i \cdot \underbrace{\cos(\omega t)}_{x_2} \big)$$

$$\phi_2(t) = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Zusammensetzen: $\phi(t) = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Gegeben ist der dargestellte Tankbehälter aus Übung 3.)



In der vorherigen Übung 3.) wurden die folgenden linearisierten Differentialgleichungen in der Ruhelage des Systems bei einem konstanten Zufluss $q_{zu,0} > 0$ bestimmt. Die Δ in der linearisierten Differentialgleichung wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{h}_A &= k_q \cdot q_{zu} + k_{A,1} \cdot h_A + k_{B,1} \cdot h_B \\ \dot{h}_B &= k_{A,2} \cdot h_A + k_{B,2} \cdot h_B \end{aligned}}$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

In Übung 3.) wurden die folgenden linearisierten Differentialgleichungen in der Ruhelage des Systems bei einem konstanten Zufluss $q_{zu,0} > 0$ bestimmt. Die Δ in der linearisierten Differentialgleichung wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen

$$\dot{h}_A = k_q \cdot q_{zu} + k_{A,1} \cdot h_A + k_{B,1} \cdot h_B$$
$$\dot{h}_B = k_{A,2} \cdot h_A + k_{B,2} \cdot h_B$$

Aufgaben:

a) Geben Sie eine Differentialgleichung an, die den Füllstand h_B in Abhängigkeit vom Zufluss q_{zu} beschreibt.

b) Transformieren Sie beide gegebenen Differentialgleichungen in den Laplace-Bereich. Geben Sie einen Ausdruck für den Füllstand $H_B(s)$ in Abhängigkeit des Zuflusses an.

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Geben Sie eine Differentialgleichung an, die den Füllstand h_B in Abhängigkeit vom Zufluss q_{zu} beschreibt.

$$\dot{h}_B = k_{A,2} \cdot h_A + k_{B,2} \cdot h_B \longrightarrow h_A = \frac{1}{k_{A,2}} \cdot \dot{h}_B - \frac{k_{B,2}}{k_{A,2}} h_B$$

$$\downarrow$$

$$\ddot{h}_B = k_{A,2} \dot{h}_A + k_{B,2} \dot{h}_B$$

$$\uparrow$$

$$\dot{h}_A = k_q \cdot q_{zu} + k_{A,1} \cdot h_A + k_{B,1} \cdot h_B$$

$$\ddot{h}_B = k_{A,2} k_q \cdot q_{zu} + k_{A,2} k_{A,1} \cdot h_A + k_{A,2} k_{B,1} \cdot h_B + k_{B,2} \dot{h}_B$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Geben Sie eine Differentialgleichung an, die den Füllstand h_B in Abhängigkeit vom Zufluss q_{zu} beschreibt.

$$\ddot{h}_B = (k_{A,1} + k_{B,2})\,\dot{h}_B + (k_{A,2}k_{B,1} - k_{A,1}k_{B,2})\,h_B + k_{A,2} \cdot k_q \cdot q_{zu}$$

Eigenschaften der Laplace-Transformation

- Linearität: $\boxed{a \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; a \cdot F(s)\,;\;\; a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)}$
- Verschiebung: $f(t - T_t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s) \cdot e^{-sT_t} \;\; (T_t \geq 0)$
- Differentiation: $$\boxed{\begin{aligned} \dot{f}(t) &\;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s \cdot F(s) - f(0) \\ \ddot{f}(t) &\;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - \dot{f}(0) \\ f^{(n)}(t) &\;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^n \cdot F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} \cdot f^{(k-1)}(0) \end{aligned}}$$
- Integration: $\int_0^t f(\tau)d\tau \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s} \cdot F(s)$
- Anfangswert: $\lim_{t \to 0} f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s)$
- Endwert: $\lim_{t \to \infty} f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: b) Transformieren Sie beide gegebenen Differentialgleichungen in den Laplace-Bereich. Geben Sie einen Ausdruck für den Füllstand $H_B(s)$ in Abhängigkeit des Zuflusses an.

$$\dot{h}_A = k_q \cdot q_{zu} + k_{A,1} \cdot h_A + k_{B,1} \cdot h_B$$

$$\dot{h}_B = k_{A,2}\, h_A + k_{B,2} \cdot h_B$$

$\dot{h}_A(t): \quad s \cdot H_A(s) - h_{A,0}$

$h_A(t): \quad H_A(s)$

$q_{zu}(t): \quad Q_{zu}(s)$

$\dot{h}_B(t): \quad s\, H_B(s) - h_{B,0}$

$h_B(t): \quad H_B(s)$

$$\boxed{s\, H_B(s) - h_{B,0} = k_{A,2}\, H_A(s) + k_{B,2}\, H_B(s)}$$

$$\boxed{s \cdot H_A(s) - h_{A,0} = k_q \cdot Q_{zu}(s) + k_{A,1}\, H_A(s) + k_{B,1} \cdot H_B(s)}$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: b) Transformieren Sie beide gegebenen Differentialgleichungen in den Laplace-Bereich. Geben Sie einen Ausdruck für den Füllstand $H_B(s)$ in Abhängigkeit des Zuflusses an.

$$H_A(s)(s-k_{A,1}) = k_q Q_{zu}(s) + k_{B,1} H_B(s) + h_{A,0}$$

$$\Leftrightarrow H_A(s) = \frac{k_q}{s-k_{A,1}} Q_{zu}(s) + \frac{k_{B,1}}{s-k_{A,1}} H_B(s) + \frac{1}{s-k_{A,1}} h_{A,0}$$

$$H_B(s-k_{B,2}) = k_{A,2} H_A(s) + h_{B,0}$$

$$H_B(s)(s-k_{B,2}) = \frac{k_{A,2} k_q}{s-k_{A,1}} Q_{zu}(s) + \frac{k_{A,2} k_{B,1}}{s-k_{A,1}} H_B(s) + \frac{k_{A,2}}{s-k_{A,1}} h_{A,0} + h_{B,0}$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: b) Transformieren Sie beide gegebenen Differentialgleichungen in den Laplace-Bereich. Geben Sie einen Ausdruck für den Füllstand $H_B(s)$ in Abhängigkeit des Zuflusses an.

$$H_B(s) = \underbrace{\frac{K_q\, k_{A,2}}{(s-k_{B,2})(s-k_{A,1}) - k_{B,1}\, k_{A,2}}}_{G(s)} \cdot Q_{zu}(s) + \underbrace{\frac{h_{A,0}\, k_{A,2} + h_{B,0}(s-k_{A,1})}{(s-k_{B,2})(s-k_{A,1}) - k_{B,2}\, k_{A,2}}}_{\text{Anfangswerte}}$$

Übertragungsfunktion

„partikuläre Lösung"

„homogene Lösung"

Aufgabe 1: Tankbehälter

Es werden weiterhin die linearisierten Differentialgleichungen aus Übung 3.) betrachtet

$$\dot{h}_A = k_q \cdot q_{zu} + k_{A,1} \cdot h_A + k_{B,1} \cdot h_B$$
$$\dot{h}_B = k_{A,2} \cdot h_A + k_{B,2} \cdot h_B$$

Hinweis: Im Folgenden gilt: $k_{A,1} = k_{B,1} = 1,\ k_{A,2} = k_{B,2} = -2,\ h_{A,0} = 2,\ h_{B,0} = 1$

Aufgabe: c) Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf des Füllstandes $h_B(t)$ der aus den gegebenen Anfangswerten für $h_{A,0}$ und $h_{B,0}$ resultiert. Es wird angenommen, dass keine zusätzliche Flüssigkeit in den Tank A fließt ($q_{zu} = 0$).

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: c) Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf des Füllstandes $h_B(t)$ der aus den gegebenen Anfangswerten für $h_{A,0}$ und $h_{B,0}$ resultiert. Es wird angenommen, dass keine zusätzliche Flüssigkeit in den Tank A fließt ($q_{zu} = 0$).

$\hookrightarrow Q_{zu}(s) = 0$

$$H_B(s) = \frac{h_{A,0} k_{A,2} + h_{B,0}(s - k_{A,1})}{(s - k_{B,2})(s - k_{A,1}) - k_{B,1} k_{A,2}} = \frac{s+4}{s^2+s} = \frac{s+4}{s(s+1)} \longrightarrow \text{Nr. } 11$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: c) Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf des Füllstandes $h_B(t)$ der aus den gegebenen Anfangswerten für $h_{A,0}$ und $h_{B,0}$ resultiert. Es wird angenommen, dass keine zusätzliche Flüssigkeit in den Tank A fließt ($q_{zu} = 0$).

$$H_B(s) = \frac{s+4}{s(s+1)}$$

$a = 4$

$b = 1$

11	$\left(\frac{a}{b} + \frac{b-a}{b} \cdot e^{-bt}\right) \cdot 1(t)$	$\frac{(s+a)}{s(s+b)}$

$$H_B(s) = \frac{s+4}{s(s+1)} \longrightarrow h_B(t) = \frac{4}{1} + \frac{1-4}{1} e^{-1t} = \underline{\underline{4 - 3e^{-t}}}$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: b) Transformieren Sie beide gegebenen Differentialgleichungen in den Laplace-Bereich. Geben Sie einen Ausdruck für den Füllstand $H_B(s)$ in Abhängigkeit des Zuflusses an.

$$H(s) = \underbrace{\cancel{C}}_{=I}(sI - A)^{-1}B + \cancel{D}$$

$\rightarrow 0$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

$$y = x \longrightarrow C = I,\quad D = 0$$

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_A \\ \dot{h}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{A,1} & k_{B,1} \\ k_{A,2} & k_{B,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_A \\ h_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_q \\ 0 \end{pmatrix} q_{zu}$$

$$H(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}}B$$

$$\left[\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_{A,1} & k_{B,1} \\ k_{A,2} & k_{B,2} \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} s-k_{A,1} & -k_{B,1} \\ -k_{A,2} & s-k_{B,2} \end{pmatrix}^{-1}$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: b) Transformieren Sie beide gegebenen Differentialgleichungen in den Laplace-Bereich. Geben Sie einen Ausdruck für den Füllstand $H_B(s)$ in Abhängigkeit des Zuflusses an.

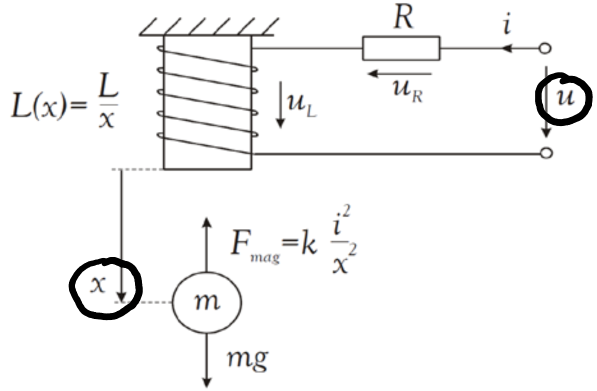
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s-k_{A,1})(s-k_{B,2}) - k_{B,1}k_{A,2}} \begin{pmatrix} (s-k_{B,2}) & k_{B,2} \\ k_{A,2} & (s-k_{A,1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_q \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} H_A(s) \\ H_B(s) \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{(s-k_{A,1})(s-k_{B,2}) - k_{B,1}k_{A,2}} \begin{pmatrix} (s-k_{B,2})k_q \\ k_{A,2}k_q \end{pmatrix}}_{G(s)} \cdot Q_{zu}(s)$$

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Gegeben sei das System des elektrischen Hubmagneten aus Übung 2.)



Es gelten die gleichen Angaben wie in Übung 2.). Außerdem sind aus der Übung die folgenden linearisierten Differentialgleichungen in einer Ruhelage mit der konstanten Spannung $u_0 \geq 0$ bekannt:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = k_{i,1} \cdot i + k_u \cdot u \qquad (1)$$
$$\ddot{x} = k_x \cdot x - k_{i,2} \cdot i \qquad (2)$$

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Es gelten die gleichen Angaben wie in Übung 2.). Außerdem sind aus der Übung die folgenden linearisierten Differentialgleichungen in einer Ruhelage mit der konstanten Spannung $u_0 \geq 0$ bekannt:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = k_{i,1} \cdot i + k_u \cdot u \quad (1)$$

$$\ddot{x} = k_x \cdot x - k_{i,2} \cdot i \quad (2)$$

<u>Hinweis</u>: *Die Δ wurden in der Gleichung aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen*

Aufgaben: a) Transformieren Sie die beiden Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Bildbereich

b) Geben Sie die vollständige Laplace-Transformierte des Systems mit dem Eingang $U(s)$ und dem Ausgang $Y(s)$ an

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Transformieren Sie die beiden Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Bildbereich

$$\frac{\partial i}{\partial t} = k_{i,1} \cdot i + k_u \cdot u$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} : \quad s\,I(s) - i_0$$

$$i(t) : \quad I(s)$$

$$u(t) : \quad U(s)$$

$$s\,I(s) - i_0 = k_{i,1}\, I(s) + k_u \cdot U(s)$$

$$I(s)\,(s - k_{i,1}) = k_u\, U(s) + i_0$$

$$I(s) = \underbrace{\frac{k_u}{(s - k_{i,1})}}_{G(s)}\, U(s) + \frac{i_0}{(s - k_{i,1})}$$

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Transformieren Sie die beiden Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Bildbereich

$$\ddot{x} = k_x\, x - k_{i,2} \cdot i$$

$\ddot{x}(t) : \quad s^2 X(s) - s \cdot x_0 - \dot{x}_0$

$x(t) : \quad X(s)$

$i(t) : \quad I(s)$

$$s^2 X(s) - s \cdot x_0 - \dot{x}_0 = k_x\, X(s) - k_{i,2}\, I(s)$$

$$X(s)\left(s^2 - k_x\right) = -k_{i,2}\, I(s) + s\, x_0 + \dot{x}_0$$

$$X(s) = \underbrace{\frac{-k_{i,2}}{(s^2 - k_x)}}_{G(s)}\, I(s) + \frac{s\, x_0 + \dot{x}_0}{(s^2 - k_x)}$$

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Transformieren Sie die beiden Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Bildbereich

$$I(s) = \frac{K_u}{(s - k_{i,1})} U(s) + \cancel{\frac{i_0}{(s - k_{i,1})}} \rightarrow 0$$

$$X(s) = -\frac{k_{i,2}}{(s^2 - k_x)} I(s) + \cancel{\frac{s x_0 + \dot{x}_0}{(s^2 - k_x)}} \rightarrow 0$$

→ System eingeschwungen, Anfangswerte abgeklungen

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: b) Geben Sie die ~~vollständige Laplace-Transformierte~~ Übertragungsfunktion des Systems mit dem Eingang $U(s)$ und dem Ausgang $Y(s)$ an

$$Y(s) \rightarrow X(s), \quad U(s) \rightarrow U(s)$$

Pos. der Kugel

Spannung

$$X(s) = -\frac{K_{i,2}}{(s^2 - K_x)} I(s) \qquad I(s) = \frac{K_u}{(s - K_{i,1})} U(s)$$

$$X(s) = -\frac{K_{i,2}}{(s^2 - K_x)} \cdot \frac{K_u}{s - K_{i,1}} U(s) = \frac{-K_{i,2} K_u}{(s^2 - K_x)(s - K_{i,1})}$$

$$X(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: b) Geben Sie die vollständige Laplace-Transformierte des Systems mit dem Eingang $U(s)$ und dem Ausgang $Y(s)$ an

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$x = x_1$$
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = \ddot{x}$$

Zustandsraumsystem:

Inverse einer 3x3 Matrix erf.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial i}{\partial t} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{i,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_{i,2} & k_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Aufgabe 3: Lineare Übertragungsglieder

Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen:

- $T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$
- $\ddot{y}(t) + 2D\omega_0 \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = K \cdot u(t)$
- $T_1 \cdot \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K \cdot u(t)$
- $T_1 \cdot \ddot{y}(t) + T_2 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K(u(t) + T_D \cdot \dot{u}(t))$

Aufgabe: Stellen Sie die Übertragungsfunktionen der vier Differentialgleichungen im eingeschwungenen Zustand mit Hilfe der Laplace-Transformation auf. Klassifizieren Sie anschließend deren Übertragungsverhalten.

Aufgabe 3: Lineare Übertragungsglieder

Aufgabe: Stellen Sie die Übertragungsfunktion der folgenden Differentialgleichung auf

$$T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$$

Vernachlässige Anfangswerte

$$T_1\, s \cdot Y(s) + Y(s) = K \cdot U(s)$$

$$Y(s)\left[T_1 s + 1\right] = K \cdot U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{K}{T_1 s + 1}}_{G(s)} U(s)$$

$\longrightarrow$ PT_1-System

Aufgabe 3: Lineare Übertragungsglieder

Aufgabe: Stellen Sie die Übertragungsfunktion der folgenden Differentialgleichung auf

$$\ddot{y}(t) + 2D\omega_0 \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = K \cdot u(t)$$

$$s^2 Y(s) + 2D\omega_0 \cdot s \cdot Y(s) + \omega_0^2 Y(s) = K \cdot U(s)$$

$$Y(s)\left[s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2\right] = K \cdot U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{K}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}}_{G(s)} U(s)$$

$G(s) \longrightarrow PT_2$ - System

Aufgabe 3: Lineare Übertragungsglieder

Aufgabe: Stellen Sie die Übertragungsfunktion der folgenden Differentialgleichung auf

y(t) fehlt

$$T_1 \cdot \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K \cdot u(t)$$

$$T_1 s^2 Y(s) + s Y(s) = K \cdot U(s)$$

$$Y(s)\left[T_1 s^2 + s\right] = K \cdot U(s)$$

$$Y(s) = \frac{K}{T_1 s^2 + s} U(s)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{Integrator}} \cdot \underbrace{\frac{K}{T_1 s + 1}}_{PT_1} U(s)$$

Integration

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \rightarrow \frac{1}{s} F(s)$$

IT_1 - System

Aufgabe 3: Lineare Übertragungsglieder

Aufgabe: Stellen Sie die Übertragungsfunktion der folgenden Differentialgleichung auf

$$T_1 \cdot \ddot{y}(t) + T_2 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K(u(t) + T_D \cdot \dot{u}(t))$$

$$T_1 s^2 Y(s) + T_2 s \cdot Y(s) + Y(s) = K\{U(s) + T_D s U(s)\}$$

$$Y(s)[T_1 s^2 + T_2 s + 1] = U(s) K[1 + T_D s]$$

$$Y(s) = \frac{K[1 + T_D s]}{T_1 s^2 + T_2 s + 1} U(s)$$

$$= [1 + T_D s] \cdot \frac{K}{T_1 s^2 + T_2 s + 1} U(s)$$

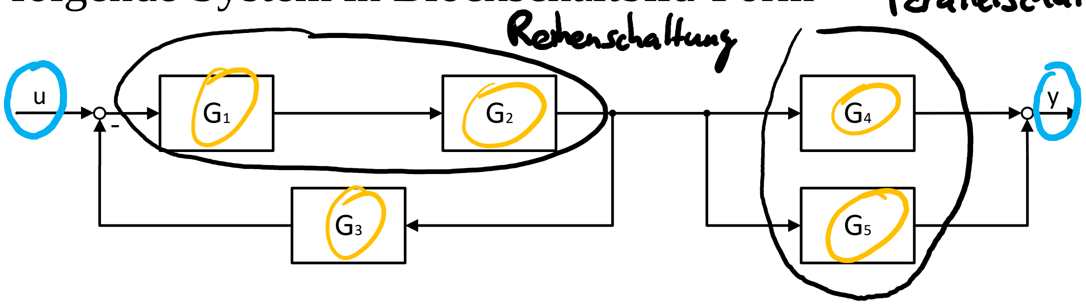
Differenzierer $\qquad PT_2$

PDT_2 - System

Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern

Gegeben ist das folgende System in Blockschaltbild-Form

Parallelschaltung

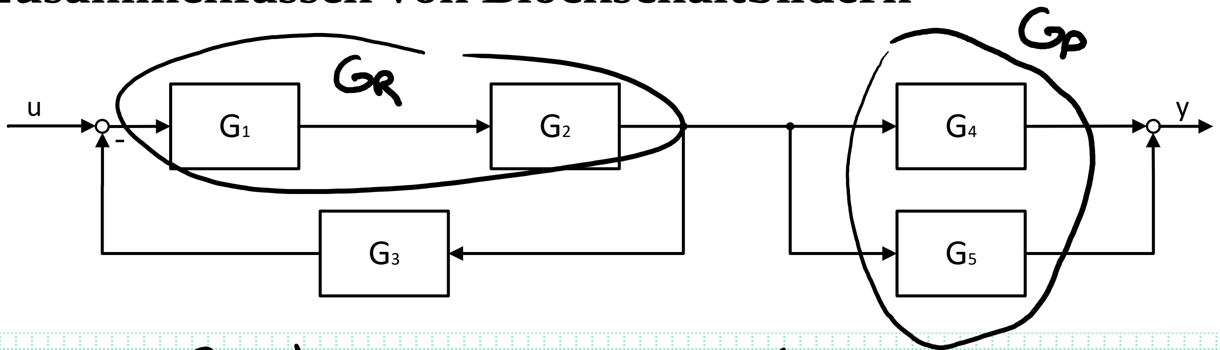


$y(s) = G(s) \cdot U(s)$

mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_1(s) - G_5(s)$

Aufgabe: Fassen Sie das oben aufgeführte System zu einer Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ zusammen. Verwenden Sie hierzu die Gesetze zum Zusammenfassen von Reihen- und Parallelschaltungen sowie Rückkopplungen.

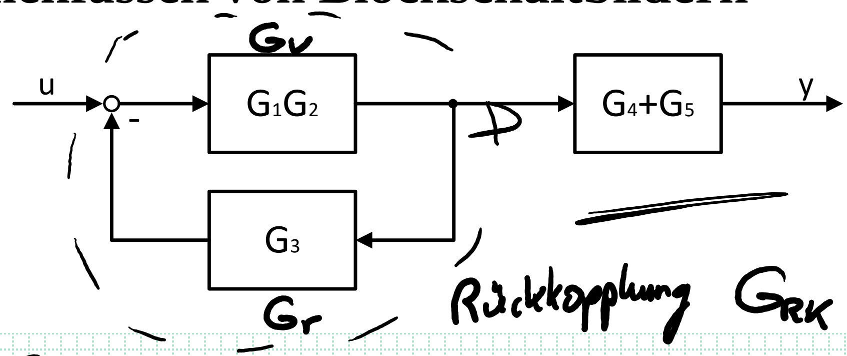
Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern



$$G_R(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \quad \longrightarrow \text{Reihenschaltung}$$

$$G_P(s) = G_4(s) + G_5(s) \quad \longrightarrow \text{Parallelschaltung}$$

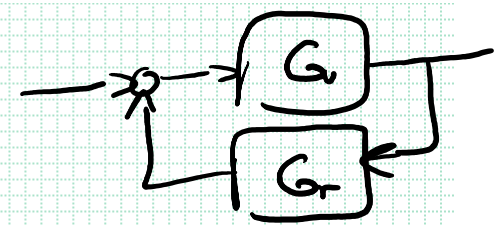
Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern



Rückkopplung G_{RK}

$$G_v(s) = G_1(s)\,G_2(s)$$

$$G_r = G_3(s)$$



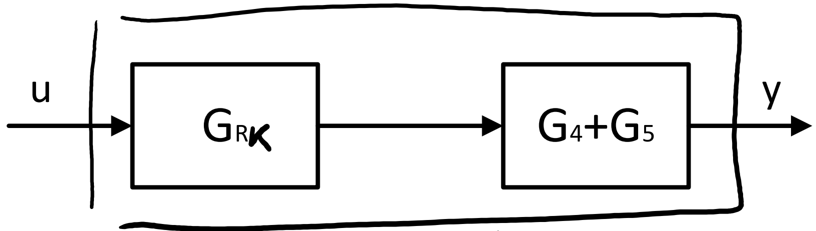
pos. Rückkopplung

$$\frac{G_v}{1 - G_v G_r}$$

$$G_{RK}(s) = \frac{G_v}{1 + G_v G_r}$$ negative Rückkopplung

$$= \frac{G_1(s)\,G_2(s)}{1 + G_1(s)\,G_2(s)\,G_3(s)}$$

Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern



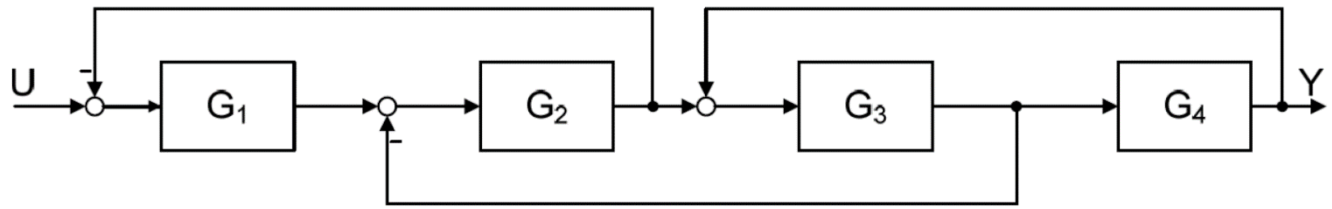
Reihenschaltung

$G(s)$ $\qquad$ $y(s) = G(s)\, u(s)$

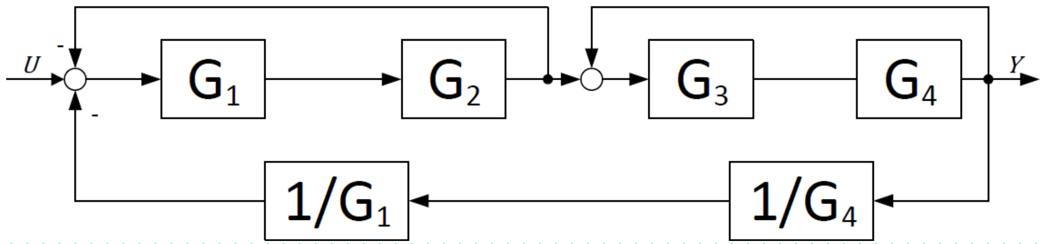
$$G(s) = G_{RK}(s)\left(G_4(s) + G_5(s) \right)$$

$$= \frac{G_1(s)\, G_2(s) \left(G_4(s) + G_5(s) \right)}{1 + G_1(s)\, G_2(s)\, G_3(s)}$$

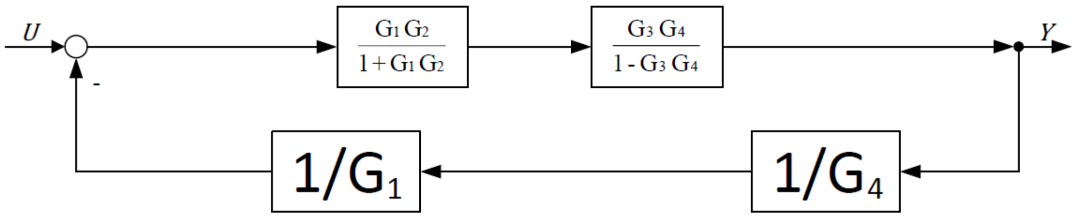
Aufgabe 5: Zusammenfassen von Blockschaltbildern



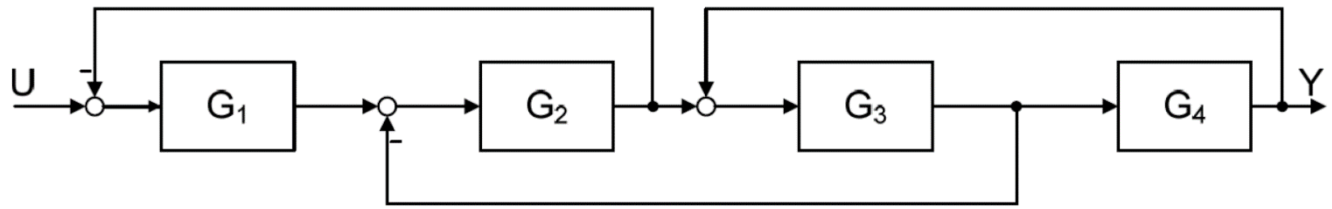
Aufgabe 5: Zusammenfassen von Blockschaltbildern



Aufgabe 5: Zusammenfassen von Blockschaltbildern



Aufgabe 5: Zusammenfassen von Blockschaltbildern



Aufgabe 5: Zusammenfassen von Blockschaltbildern