Regelungstechnik

6. Übung

Victor Cheidde Chaim

22. Februar 2021

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

Aufgabe 5.1

Zerlegen Sie die folgenden Übertragungsfunktion jeweils in ein Allpaßsystem und ein Phasenminimumsystem:

zu Hause
(Lösung
Seminar-
folien 210201)

$$(i) \quad G(s) = \frac{2(s-1)}{s+1}$$

$$(ii) \quad G(s) = \frac{(s+1)}{s+2}$$

$$(iii) \quad G(s) = \frac{(s-2)(s+1)(s+(1-i))(s+(1+i))}{(s-(3+i))(s-(3-i)(s+4)}$$

$$(iv) \quad G(s) = \frac{(s-1)(s^2+1)(s^2+17s+5)}{(s+1)(s^2-5s+17)}$$

Aufgabe 5.1

iv) $G(s) = \dfrac{(s-1)(s^2+1)(s^2+17s+5)}{(s+1)(s^2-5s+17)}$

Allpaß

- NS haben nichtpositiven Realteil.
- Pole Realteil > 0.

$G_{All}(s) = \dfrac{(s-1)}{(s+1)} \cdot \dfrac{(s^2+5s+17)}{(s^2-5s+17)}$

- $|G_{All}(j\omega)| = 1$

$G_{PM}(s) = \dfrac{(s^2+1)(s^2+17s+5)}{(s^2+5s+17)}$ $\Rightarrow$ $G(s) = G_{All}(s)\,G_{PMS}(s)$ ✓

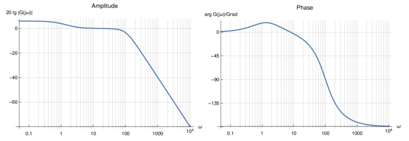
Aufgabe 5.2

5.2 Aufgabe. Stellen Sie fest, zu welcher der angegebenen Übertragungsfunktionen das dargestellte Bode-Diagramm gehört. Geben Sie dazu für 5 der 6 Fälle jeweils ein Merkmal der Übertragungsfunktion und ein Merkmal des Bode-Diagramms an, die nicht miteinander verträglich sind.

$$G_1(s) = -\frac{\frac{s}{10}+1}{(s-1)\left(\frac{s^2}{10000}+\frac{3s}{200}+1\right)}, \qquad G_2(s) = -\frac{\frac{s}{10}-1}{(s+1)\left(\frac{s^2}{10000}+\frac{3s}{200}+1\right)},$$

$$G_3(s) = \frac{\frac{s}{10}-1}{(s-1)\left(\frac{s^2}{10000}+\frac{3s}{200}+1\right)}, \qquad G_4(s) = \frac{s-2}{(s-1)\left(\frac{s^2}{10000}+\frac{3s}{200}+1\right)},$$

$$G_5(s) = \frac{\frac{s}{10}-1}{(s-1)\left(\frac{s^2}{10000}+\frac{2s}{25}+1\right)}, \qquad G_6(s) = \frac{\frac{s}{10}-1}{(s-1)\left(\frac{s^2}{10000}+\frac{s}{200}+1\right)}.$$



G1: NS −10 müsste Phase nach oben knicken.

G2: Pol −1 müsste Phase nach unten knicken.

G3: Gleichverstärkung müsste 0dB sein

G4: alles stimmt → Die einzige ÜF, die: $\lim_{\omega \to 0} |G(j\omega)| > 0\,\mathrm{dB}$

G5: Amplitude müsste bei ca 800 nach unten knicken

G6: Resonanzüberhöhung müsste auftreten.

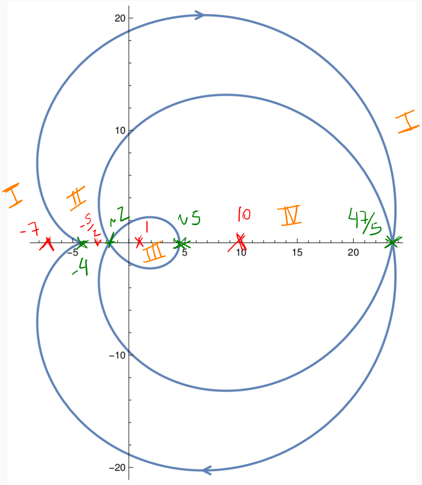
Aufgabe 5.3

5.3 Aufgabe. Die Abbildung zeigt die Ortskurve der durch

$$G(s) = \frac{2\left(64s^2 + 8s + 17\right)}{\left(s^2 + 2s + 2\right)^2} - 4$$

gegebenen Übertragungsfunktion G einer stabilen Strecke. In dieser Aufgabe soll der folgende Satz verwendet werden, um festzustellen, wieviele instabile Pole der mit einem P-Regler geschlossene Kreis für verschiedene Werte der Reglerverstärkung k hat:
Wenn die Ortskurve der Übertragungsfunktion einer stabilen Strecke nicht durch den Punkt $-1/k$ geht, dann ist die Anzahl der instabilen Pole des geschlossenen Kreises gleich der Anzahl der Umschlingungen des Punktes $-1/k$, wenn die Kurve von $\omega = -\infty$ nach $\omega = \infty$ durchlaufen wird.

Aufgabe 5.3



i) In jedem "Fenster" sowie im Außengebiet der Kurve könnten wir, zum Beispiel, die Punkt 10, 1, -5/2 und -7 wählen.

ii)

Punkt	Umschlingungen
-7	0
-5/2	1
1	3
10	2

Aufgabe 5.3

iii) Außengebiet I: $-\frac{1}{k} < -4 \quad || \quad -\frac{1}{k} > \frac{47}{2}$

$\frac{1}{k} > 4 \Rightarrow k < 4 \quad , \quad \frac{1}{k} < -\frac{47}{2} \Rightarrow k > -2/47 \Rightarrow -\frac{2}{47} < k < 1/4$

"Fenster": II: $-4 < -1/k < -2 \Rightarrow 4 > 1/k > 2 \Rightarrow 1/4 < k < \frac{1}{2}$

III: $-2 < -1/k < 5$ $\nearrow -2 < -1/k \Rightarrow 2 > 1/k \Rightarrow k > 1/2 \quad ||$ $\searrow -1/k < 5 \Rightarrow 1/k > -5 \Rightarrow k < -1/5$

IV: $5 < -1/k < 47/2 \Rightarrow -5 > 1/k > -47/2 \Rightarrow -1/5 < k < -2/47$

iv)

k	Pole
$\frac{1}{7}$	{-1.88 - 6.78 i, -1.88 + 6.78 i, -0.123 - 0.543 i, -0.123 + 0.543 i}
$\frac{2}{5}$	{-0.023 - 0.489 i, -0.023 + 0.489 i, -11.0, 7.06}
-1	{0.122 - 0.390 i, 0.122 + 0.390 i, -6.73, 2.49}
$-\frac{1}{10}$	{0.390 - 1.202 i, 0.390 + 1.202 i, -4.56, -0.216}

Aufgabe 6.1

Gegeben seien die Matrizen A und B. Berechnen Sie $exp(At)$, $exp(Bt)$ und $\underbrace{exp((A+B)t)}_{\text{zu Hause}}$. Gilt hier $\underbrace{exp(A+B) = exp(A)exp(B)}_{\text{zu Hause}}$?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $$exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \dots$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^m = 0, \quad m \geq 2.$$

$$exp(At) = I + At = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Aufgabe 6.1

- $\exp(Bt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Bt)^n}{n!} = I + Bt + \frac{B^2 t^2}{2} + \dots$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B \Rightarrow B^m = B, \quad m \geq 1$$

$$\exp(Bt) = I + B\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = I - B + B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

$$* \quad e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \quad (\text{Taylorreihe } a=0)$$

$$\exp(Bt) = I - B + Be^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

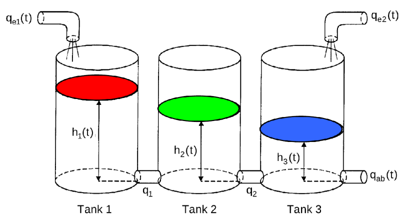
Aufgabe 6.2

Betrachtet werde eine Anordnung von drei miteinander verbundenen Wasserbehältern. F bezeichne die Querschnittsfläche der Behälter. In die Behälter 1 und 3 fließt Wasser mit den Durchsätzen (Volumen pro Zeit) q_{e1} bzw. q_{e2}, aus Behälter 3 fließt Wasser mit dem Durchsatz q_{ab} ab, usw., siehe Graphik. Gemessen werden die Füllstände h1, h2, h3 (das sind also die Ausgänge).

Gesetz von Torricelli:

$$
\begin{aligned}
q_{ab} &= \mu\sqrt{2g}\sqrt{h_3}, \\
q_i &= \mu\sqrt{2g}\,sign(h_i - h_{i+1})\sqrt{|h_i - h_{i+1}|},
\end{aligned}
$$

sowie g, μ, $F > 0$, $q_{ei} \geq 0$, $h_i \geq 0$.



(i) Modellieren Sie die Strecke als Regelungssystem in Zustandsform mit den Zuständen h_1, h_2, h_3 und den Eingängen q_{e1}, q_{e2}.

$$\dot{x} = f(x, u),$$
$$y = g(x, u),$$

i)

$x = (h_1, h_2, h_3)$

$u = (q_{e1}, q_{e2}) \Rightarrow \begin{cases} u_1 = q_{e1} \\ u_2 = q_{e2} \end{cases} \Rightarrow u = (u_1, u_2)$

$y = (h_1, h_2, h_3)$

$$\boxed{\dot{h} = \frac{Q}{F} = \frac{q_e - q_a}{F}}$$

Aufgabe 6.2

(i) Systemmodellierung:

$$\dot{h}_1 = \frac{q_{e1} - q_1}{F} = \frac{u_1}{F} - \frac{\sqrt{2g}\,\mu_1 \sqrt{|h_1 - h_2|}\,\mathrm{sign}(h_1 - h_2)}{F}$$

$$\dot{h}_2 = \frac{q_1 - q_2}{F} = \frac{\sqrt{2g}\,\mu}{F}\left(\sqrt{|h_1 - h_2|}\,\mathrm{sign}(h_1 - h_2) - \sqrt{|h_2 - h_3|}\,\mathrm{sign}(h_2 - h_3)\right)$$

$$\dot{h}_3 = \frac{q_2 - q_{ab} + q_{e2}}{F} = \frac{\sqrt{2g}\,\mu}{F}\left(\sqrt{|h_2 - h_3|}\,\mathrm{sign}(h_2 - h_3) - \sqrt{|h_3|}\right) + \frac{u_2}{F}$$

$$[\dot{h}_1, \dot{h}_2, \dot{h}_3] = f(x, u) \;//$$

(ii) Ruhelagen: $\dot{x} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow f(x, u) = 0$

Für $F = \mu\sqrt{2g} = 1$:

$$\begin{pmatrix} u_1 - \sqrt{|h_1 - h_2|}\,\mathrm{sign}(h_1 - h_2) \\ \sqrt{|h_1 - h_2|}\,\mathrm{sign}(h_1 - h_2) - \sqrt{|h_2 - h_3|}\,\mathrm{sign}(h_2 - h_3) \\ \sqrt{|h_2 - h_3|}\,\mathrm{sign}(h_2 - h_3) - \sqrt{|h_3|} + u_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{h}_1 = 0 \Rightarrow u_1 \geq 0 \Rightarrow h_1 \geq h_2 \\ \dot{h}_2 = 0, \text{ da } h_1 \geq h_2 \Rightarrow h_2 \geq h_3 \end{array}\right\} h_1 \geq h_2 \geq h_3$$

Aufgabe 6.2

(ii) Ruhelagen: Für $h_1 \geq h_2 \geq h_3$:
$$\begin{pmatrix} -\sqrt{h_1 - h_2} + u_1 \\ \sqrt{h_1 - h_2} - \sqrt{h_2 - h_3} \\ \sqrt{h_2 - h_3} - \sqrt{h_3} + u_2 \end{pmatrix} = 0$$

1. Addition von Zeile 1 - 3 :

$$\sqrt{h_3} + u_1 + u_2 = 0 \Rightarrow \boxed{h_3 = (u_1 + u_2)^2} \text{ if } u_1 + u_2 \geq 0$$

2. Addition 1 + Zeile 2

$$-\sqrt{h_2 - h_3} + u_1 = 0 \Rightarrow \boxed{h_2 = 2u_1^2 + 2u_1 u_2 + u_2^2 = u_1^2 + (u_1 + u_2)^2}$$

3. Zeile 1

$$-\sqrt{h_1 - h_2} + u_1 = 0 \Rightarrow \boxed{h_1 = 3u_1^2 + 2u_1 u_2 + u_2^2}$$

Aufgabe 6.2

(iii) Linearisierung: wird auf dem nächsten Übungsseminar durchgeführt.

Aufgabe 6.2

(iii) Linearisierung: wird auf dem nächsten Übungsseminar durchgeführt.

Aufgabe 6.2

(iii) Linearisierung: wird auf dem nächsten Übungsseminar durchgeführt.