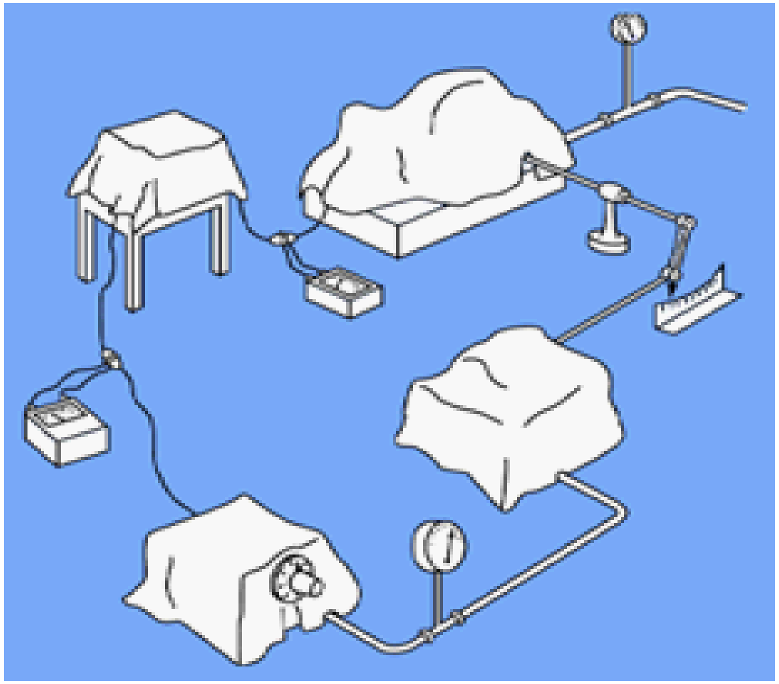
Black Box Konzept

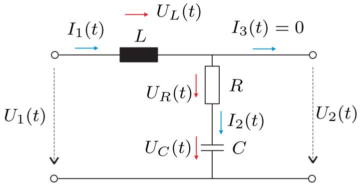
- **Konzentration auf das Wesentliche**
- **Focus auf Übertragungsverhalten**
- **Informationen werden versteckt**
- **Verschiedene Abstraktionsebenen**



→ **Beschreibung mit Hilfe von Blockschaltbildern** (MIT 1948)

Modellierungsbeispiele:

Elektrischer Schwingkreis:



mit folgenden Annahmen:

- Induktivität L, Widerstand R und Kapazität C
- für $t = 0$: kein Strom durch L, also $I_1(0) = 0$; $U_C(0) = U_{C,0}$
- $I_3(t) = 0$, so dass $I_1(t) = I_2(t)$

3.3 Modellierungsbeispiele: RLC-Netzwerk

- Kirchhoffsche Gleichungen:

$$0 = U_1 - U_C - U_R - U_L \tag{1}$$

$$U_2 = U_C + U_R = U_C + RI_1 \tag{2}$$

$$0 = I_1 - I_2 \tag{3}$$

- Verhalten der Netzwerkelemente:

$$LI_1'(t) = U_L(t) = U_1(t) - U_C(t) - U_R(t) = U_1(t) - U_C(t) - RI_1(t) \tag{4}$$

$$CU_C'(t) = I_2(t) = I_1(t) \tag{5}$$

$$U_R = RI_2(t) = RI_1(t) \tag{6}$$

- Ziel: Zustandsvariablen $x_1 = I_1$, $x_2 = U_C$ (siehe (4), (5)!), sowie $u = U_1$, $y = U_2$
- Elimination von I_2 mit Hilfe von (3)
- Elimination von U_L mit Hilfe von (1)
- Elimination von U_R mit Hilfe von (6)
- Umschreiben von (4), (5), (2):

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L}u - \frac{1}{L}x_2 - \frac{R}{L}x_1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1$$

$$y = x_2 + Rx_1$$

Analytische Lösung der Differentialgleichung (1)

zu b):

gegeben: lineares Zustandsraummodell ($n = m = 1$)

$$\dot{x} = a \cdot x + b \cdot u,\ x(0) = x_0$$

Lösungsansatz:

i) für homogene DGL: $\dot{x}_h = a \cdot x_h,\ x_h(0) = x_0,$ wähle: $x_h(t) = k \cdot e^{\lambda \cdot t}$

$$\dot{x}_h(t) = k \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} \overset{!}{=} a \cdot x_h(t) = a \cdot k \cdot e^{\lambda \cdot t} \rightarrow \lambda = a,\ x_h(t) = k \cdot e^{a \cdot t}$$

ii) für Lösung der inhomogenen DGL mit Variation der Konstanten:

$$x(t) = k(t) \cdot e^{a \cdot t}$$

$$\dot{x}(t) = \dot{k}(t) \cdot e^{a \cdot t} + k(t) \cdot a \cdot e^{a \cdot t} \overset{!}{=} a \cdot (k(t) \cdot e^{a \cdot t}) + b \cdot u(t)$$

$$\rightarrow \dot{k}(t) = e^{-a \cdot t} \cdot b \cdot u(t),\ \int_0^t \dot{k}(\tau) d\tau = k(t) - k(0) = \int_0^t e^{-a \cdot \tau} \cdot b \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

$$\rightarrow x(t) = k(0) \cdot e^{a \cdot t} + \int_0^t e^{a \cdot (t - \tau)} \cdot b \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

Analytische Lösung der Differentialgleichung (2)

mit Anfangsbedingung $x(0) = k(0) \cdot e^0 \stackrel{!}{=} x_0 \;\Leftrightarrow\; k(0) = x_0$ folgt als Gesamtlösung (homogene und partikuläre Lösung):

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{a \cdot t} \cdot x_0 + \int_0^t e^{a \cdot (t-\tau)} \cdot b \cdot u(\tau) \cdot d\tau}$$

darin:

- $x_h(t)$: Eigenbewegung durch Anfangsauslenkung x_0
- $x_p(t)$: erzwungene Bewegung durch Eingangsgröße $u(\tau)$ für $\tau \in [0, t]$

Erweiterung auf Systeme $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$, $x(0) = x_0$ mit $n \geq 1, m \geq 1$:

$$\boxed{x(t) = e^{A \cdot t} \cdot x_0 + \int_0^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau}$$

mit der numerisch berechenbaren Exponentialmatrix:

$$e^{A \cdot t} = I + A \cdot t + \frac{A^2}{2!} \cdot t^2 + \frac{A^3}{3!} \cdot t^3 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i \cdot t^i}{i!}$$

Faltungsintegral

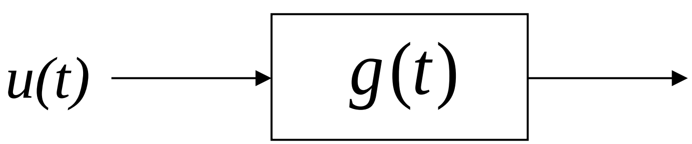
Definition:

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Eigenschaften:

- **Beschreibt die Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal im Zeitbereich.**
- **Bestimmung des Ausgangssignals für beliebige Eingangssignale.**

Achtung: t ist eine Konstante



$$y(t) = \int_0^t g(v)u(t-v)\mathrm{d}v$$

Gewichtsfunktion enthält die gesamte Information über das dynamische Verhalten eines linearen Systems.