

Wurzelortskurvenverfahren (WOK-Verfahren)

- Motivation.
- Unterscheidung: **Wurzelort** und **Wurzelortskurve**.
- Beispiel und Interpretation einer WOK.
- Ableitung des WOK-Verfahrens:
 - Ausgangspunkt ist die charakteristische Gleichung des **geschlossenen** Regelkreises:

$$1 + G_0(s) = 0$$

Wurzelortskurven-Verfahren

Bestimmung des dynamischen Verhaltens eines **geschlossenen** Regelkreises mit Hilfe der Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des **offenen** Kreis

$$G_0(s) = k_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s - n_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$$0 \leq k_0 \leq \infty$$

Pol-Nullstellenform

Amplitudenbedingung: $\frac{\prod_{i=1}^m |s - n_i|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = \frac{1}{k_0}$

Bestimmt die Parametrierung der WOK

Phasenbedingung: $\sum_{i=1}^m \varphi_{n_i} - \sum_{i=1}^n \varphi_{p_i} = \pm(2k + 1)\pi$

$$= \pm 180^\circ, 540^\circ, 900^\circ, \dots$$

Ist unabhängig von k_0 und legt den Verlauf der Wurzelortskurven fest

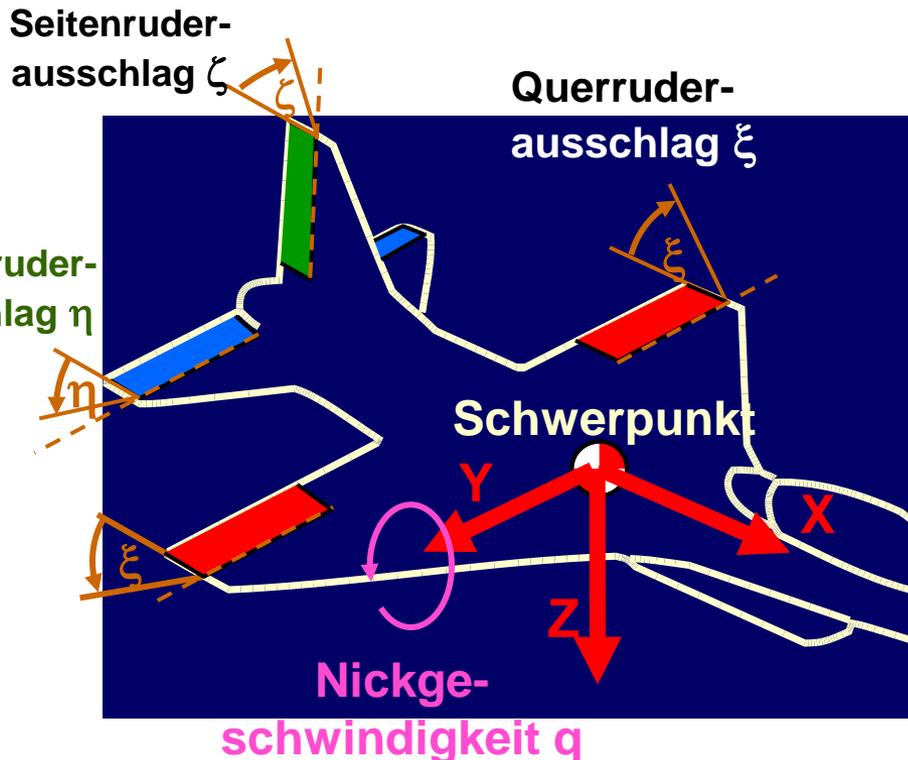


Wurzelortskurven-Verfahren

Bestimmung des dynamischen Verhaltens eines geschlossenen Regelkreises mit Hilfe der Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des offenen Kreises.

- Unterschied zwischen System- und WOK-Verstärkung
- WOK-Konstruktionsregeln
- Qualitative Skizze mit Hilfe weniger Regeln

Verbesserung der Nickdämpfung eines Flugzeuges durch Rückführung der **Nickgeschwindigkeit** q auf den **Höhenruderausschlag** η



Übertragungsfunktion des Nickverhaltens für die Daten eines F104G im Landeanflug*:

$$G_S(s) = 4,81 \frac{s + 0,565}{s^2 + 0,97s + 2,11}$$

$$G_0(s) = K_R G_S(s) = 4,81 \frac{s + 0,565}{s^2 + 0,97s + 2,11}$$

WOK-Verstärkung k_0

Systemverstärkung aus

$$K_0 = G_0(s) \Big|_{s=0} = \frac{4,81 \cdot 0,565}{2,11} = 1,288$$

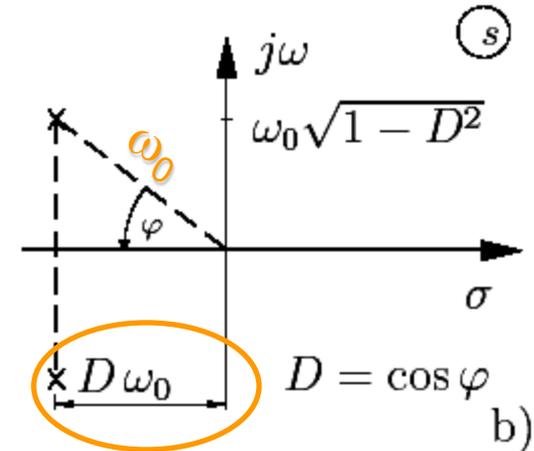
für $K_R = 1$.

*Brockhaus: Flugregelung, 2001, Springer-Verlag, S. 505

Regelungstechnik



$$G_0(s) = K_R G_S(s) = 4,81 \frac{s + 0,565}{s^2 + 0,97s + 2,11}$$



Pole: $p_{1,2} = -0,485 \pm 1,37i$

Nullstelle: $n_1 = -0,565$

Dämpfungsgrad: $D = \cos \varphi = \frac{|\operatorname{Re}(p_1)|}{\sqrt{|\operatorname{Re}(p_1)|^2 + |\operatorname{Im}(p_1)|^2}}$

$$= \frac{0,485}{\sqrt{0,485^2 + 1,37^2}} = 0,337$$

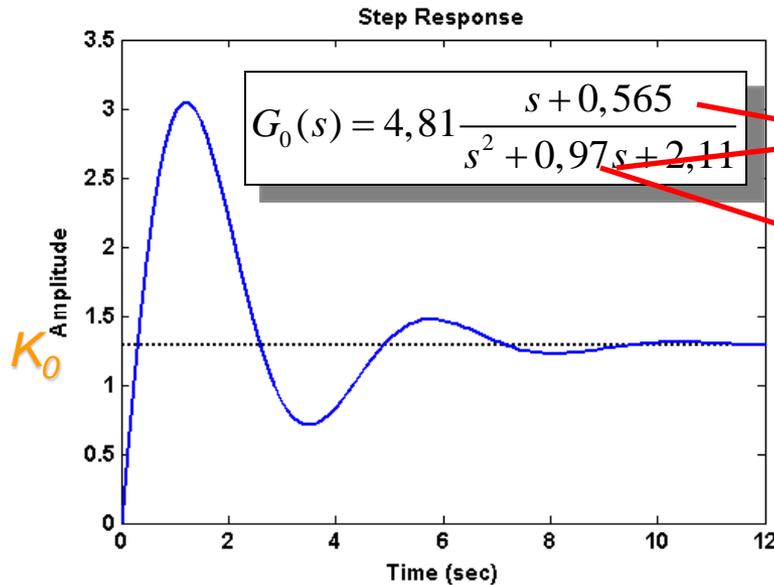
Eigenfrequenz: $\omega_0 = \frac{|\operatorname{Re}(p_1)|}{D} = \frac{0,485}{0,337} = 1,44$



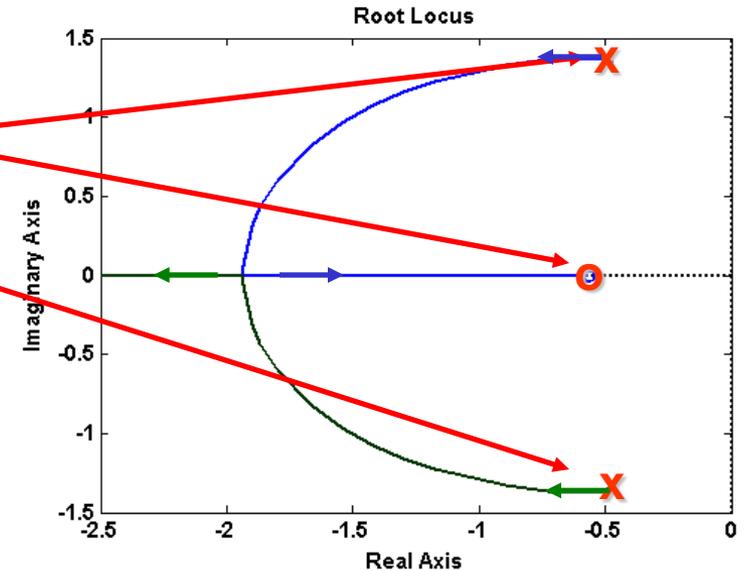
$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 0,23 \text{ Hz}$$



Sprungantwort



WOK



Strecken-Eigenschaften:

Dämpfungsgrad $D = 0,337$

Eigenfrequenz $\omega_0 = 1,44$

Gewünschte Eigenschaften:

Dämpfungsgrad $D: 0,5 - 1$

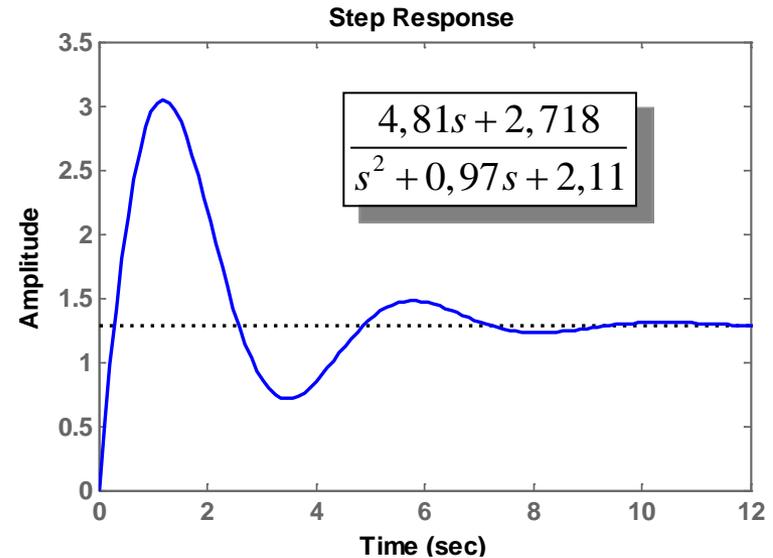
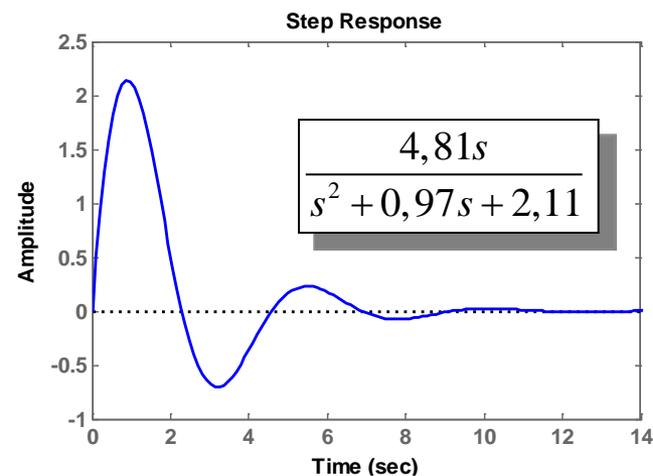
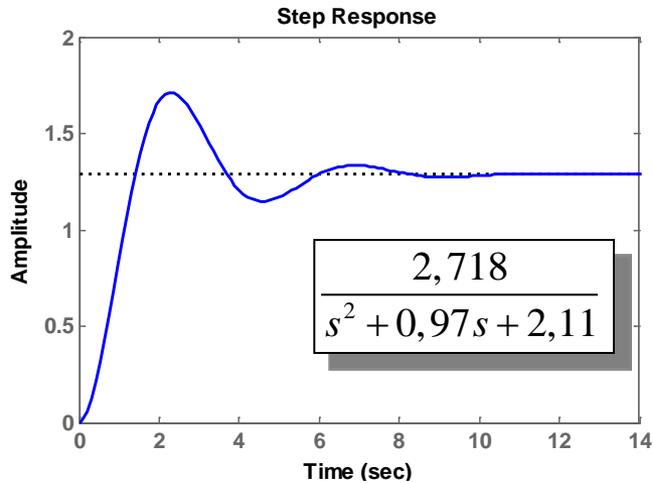
Eigenfrequenz $\omega_0: 2 - 4$



$$G_0(s) = 4,81 \frac{s + 0,565}{s^2 + 0,97s + 2,11}$$

$$= \frac{4,81s + 2,718}{s^2 + 0,97s + 2,11}$$

$$= \frac{2,718}{s^2 + 0,97s + 2,11} + \frac{4,81s}{s^2 + 0,97s + 2,11}$$



```

%
% Vorlesung RT
% Beispiel: Verbesserung der Flugeigenschaften mit Hilfe der Wurzelortskurve.
%     Erhöhung der Nickdämpfung durch Rückführung der Nickgeschwindigkeit auf das Höhenruder
%     (siehe Brockhaus, R.: Flugregelung, 2001, Springer-Verlag, S. 505 bzw. S. 630 in Ausgabe von 2011).
%
s=tf('s') % Definition der Üfkt. G(s) = s (Laplace-Variable)
%

%
% Parameter für Flugzustand F1 (Brockhaus 2001, Tabelle A.2.3 bzw. Tab. A2.1 in Ausgabe von 2011)
% (Z_eta = 0 und M_q Z_alpha << M_alpha)
%
Z_alpha = -0.565
M_alpha = -2.11
M_q = -0.405
M_eta = 4.81
%
% Definition der Strecken-Übertragungsfunktion (Gl. 14.2.3 in Brockhaus 2011)
%
G_S = M_eta*(s-Z_alpha)/(s^2 - s*(M_q+Z_alpha) - M_alpha)

%
% Definition des Reglers
%
TD = 0.4;
T1 = 1.4;
Kr = (1+TD*s)/(1+T1*s);

```



```
G_R = tf(Kr)
```

```
%
```

```
% Bestimmung von G_0(s)
```

```
%
```

```
G_0 = G_R * G_S
```

```
%
```

```
% Darstellung der Wurzelortskurve in Bild 1
```

```
%
```

```
figure(1)
```

```
rlocus(G_0)
```

```
axis equal
```

```
hold on
```

```
%
```

```
% Darstellung der Übergangsfunktion von Strecke und geschlossenem Regelkreis in Bild 2
```

```
%
```

```
figure(2)
```

```
step(G_0)
```

```
hold on
```

```
%
```

```
step(G_S/(1+G_0))
```

```
legend('ohne Rückkopplung','mit Rückkopplung')
```



Die gewünschten dynamischen Eigenschaften können mit einem P-Regler nicht erzielt werden !

Lösung:

Kompensation der Streckennullstelle bei $-0,565$ sowie Einfügung einer neuen Nullstelle, die weiter links liegt.

Einsatz eines PDT₁-Regler mit den Parametern:

$$T_D = 0,4 \quad \text{und} \quad T_1 = 1,4$$

Strecke: $n_1 = -0,565$

und der Übertragungsfunktion:

$$G_R(s) = \frac{1 + T_D s}{1 + T_1 s}$$

Nullstelle:

$$n_1 = -\frac{1}{T_D} = -\frac{1}{0,4} = -2,5$$

Reglerpol:

$$p_1 = -\frac{1}{T_1} = -\frac{1}{1,4} = -0,71$$



$$G_0(s) = K_R G_R(s) G_S(s)$$

$$= K_R \cdot \frac{1 + T_D s}{1 + T_1 s} \cdot 4,81 \cdot \frac{s + 0,565}{s^2 + 0,97s + 2,11}$$

$$T_D = 0,4$$

$$T_1 = 1,4$$

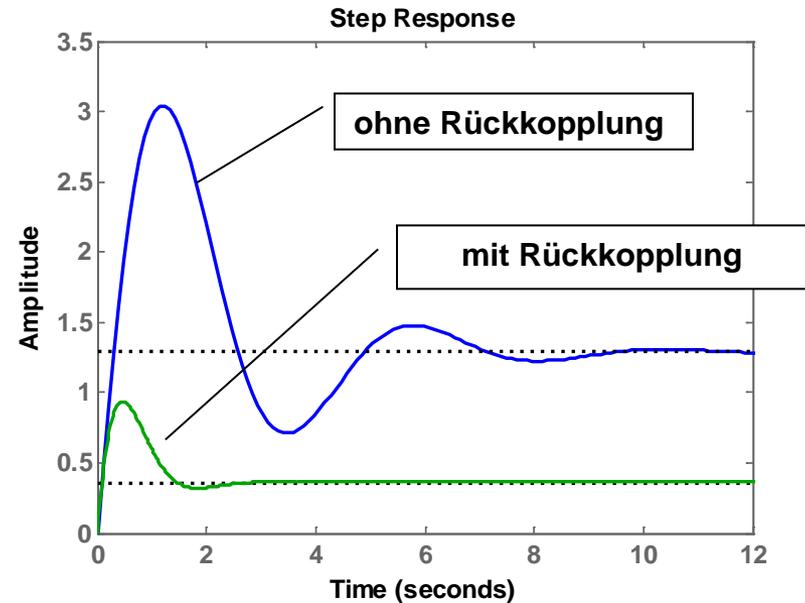
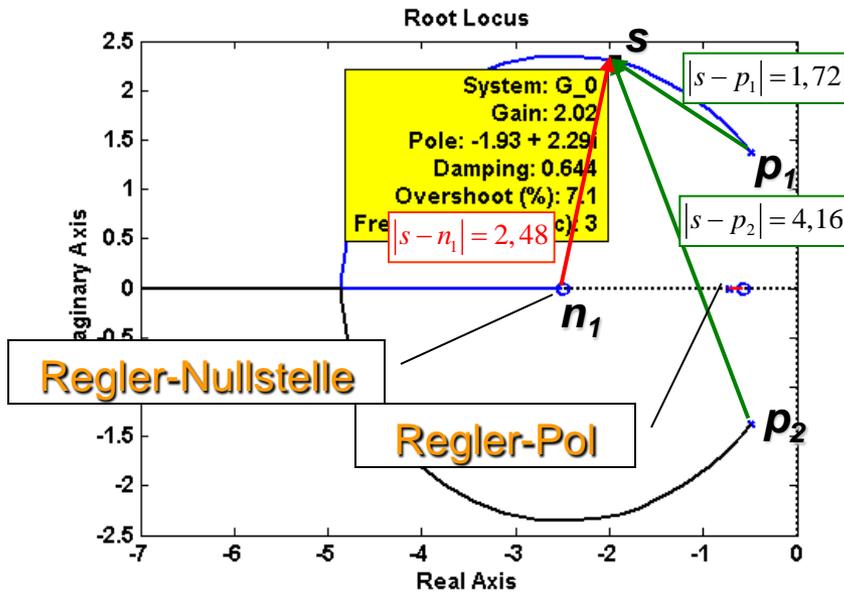
$$= K_R \frac{0,4}{1,4} \cdot \frac{s + 2,5}{s + 0,71} \cdot 4,81 \cdot \frac{s + 0,565}{s^2 + 0,97s + 2,11}$$

$$= k_0 \cdot \frac{s + 2,5}{s + 0,71} \cdot \frac{s + 0,565}{s^2 + 0,97s + 2,11}$$

mit

$$k_0 = K_R \frac{0,4}{1,4} \cdot 4,81 = 1,37 K_R$$





$$K_R = \text{Gain} = 2,02 \quad \Rightarrow \quad k_0 = 1,37 K_R = 1,37 \cdot 2,02 = 2,77$$

Graphische Ermittlung mit Regel 12:

$$k_0 = \frac{1,72 \cdot 4,16}{2,48} = 2,89$$

$$k_0 = \frac{\prod_{i=1}^m |s - p_i|}{\prod_{i=1}^n |s - n_i|}$$



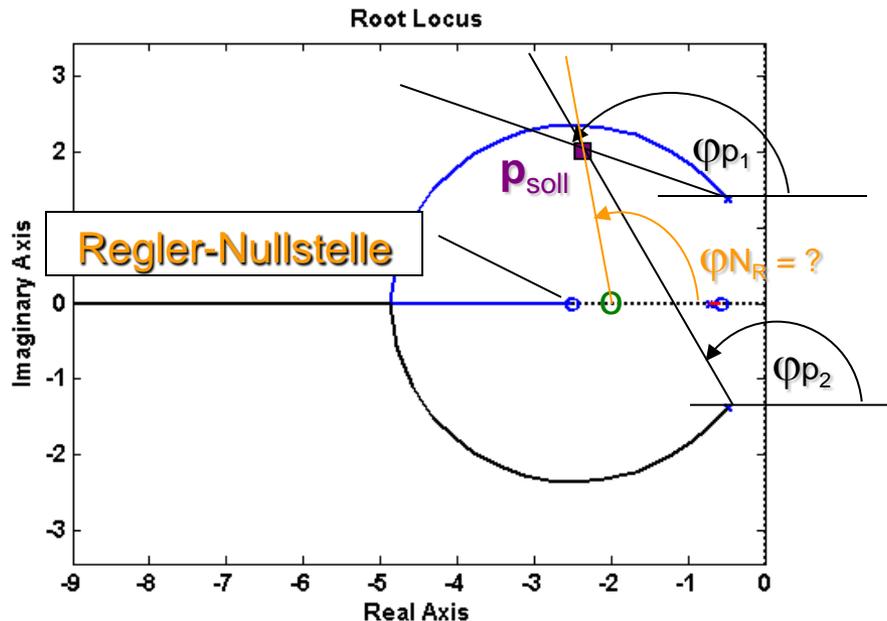
Vorgabe:

$$D = 0,75 \quad \omega_0 = 3 \quad \Rightarrow$$

Pole p_1, p_2 des geschlossenen Kreises

$$\operatorname{Re}(p_{1,2}) = D \omega_0 = 0,75 \cdot 3 = 2,25$$

$$\operatorname{Im}(p_{1,2}) = \pm \sqrt{\omega_0^2 - (D\omega_0)^2} = \pm 1,95$$



Mit Hilfe der Phasenbedingung die **Regler-Nullstelle** so festlegen, dass der Punkt p_{soll} auf der WOK liegt.

$$\varphi_{n_R} - \varphi_{P_1} - \varphi_{P_2} = 180^\circ$$

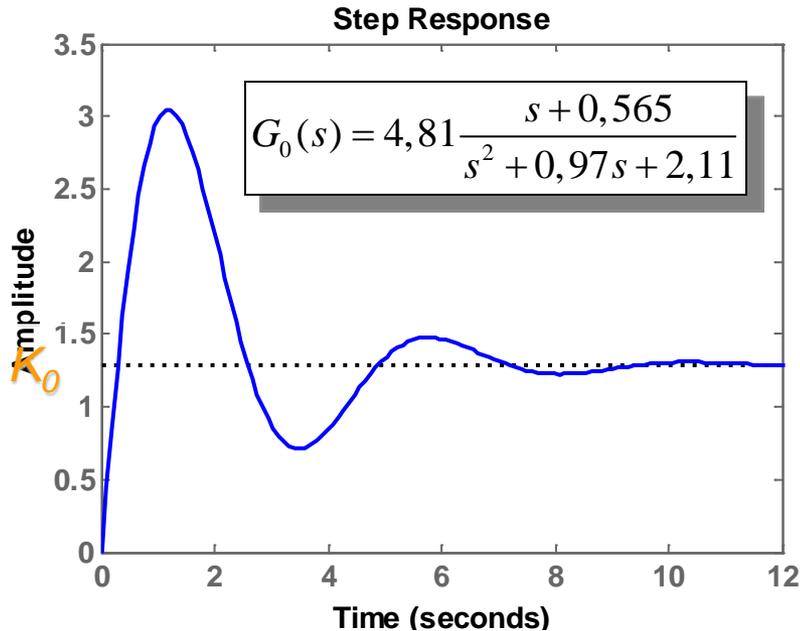
$$\varphi_{n_R} = 180^\circ + \varphi_{P_1} + \varphi_{P_2}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{n_R} &= 180^\circ + 162^\circ + 118^\circ \\ &= 460^\circ = 360^\circ + 100^\circ \end{aligned}$$

\Rightarrow **Regler-Nullstelle:** $n_R = -2,05$



Sprungantwort (ohne Rückführung)

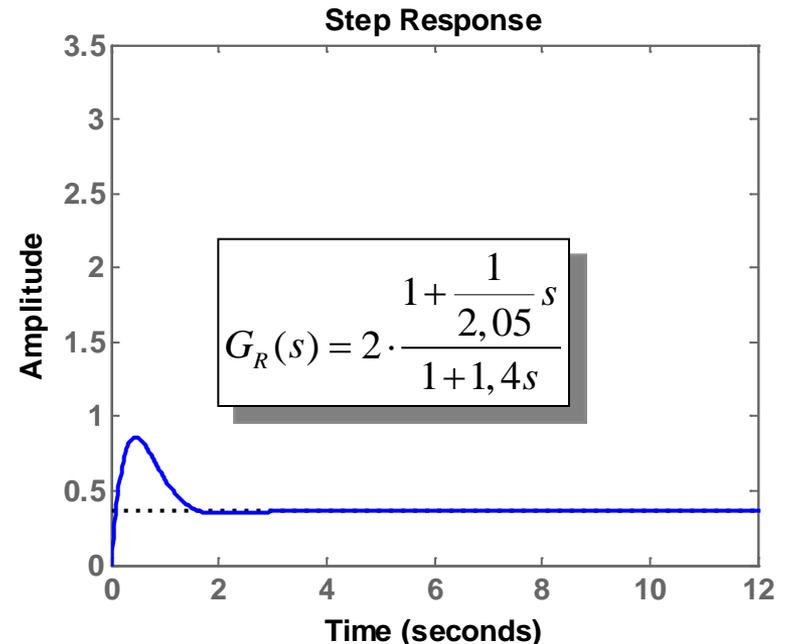


Strecken-Eigenschaften:

Dämpfungsgrad $D = 0,337$

Eigenfrequenz $\omega_0 = 1,44$

Sprungantwort (mit Rückführung)

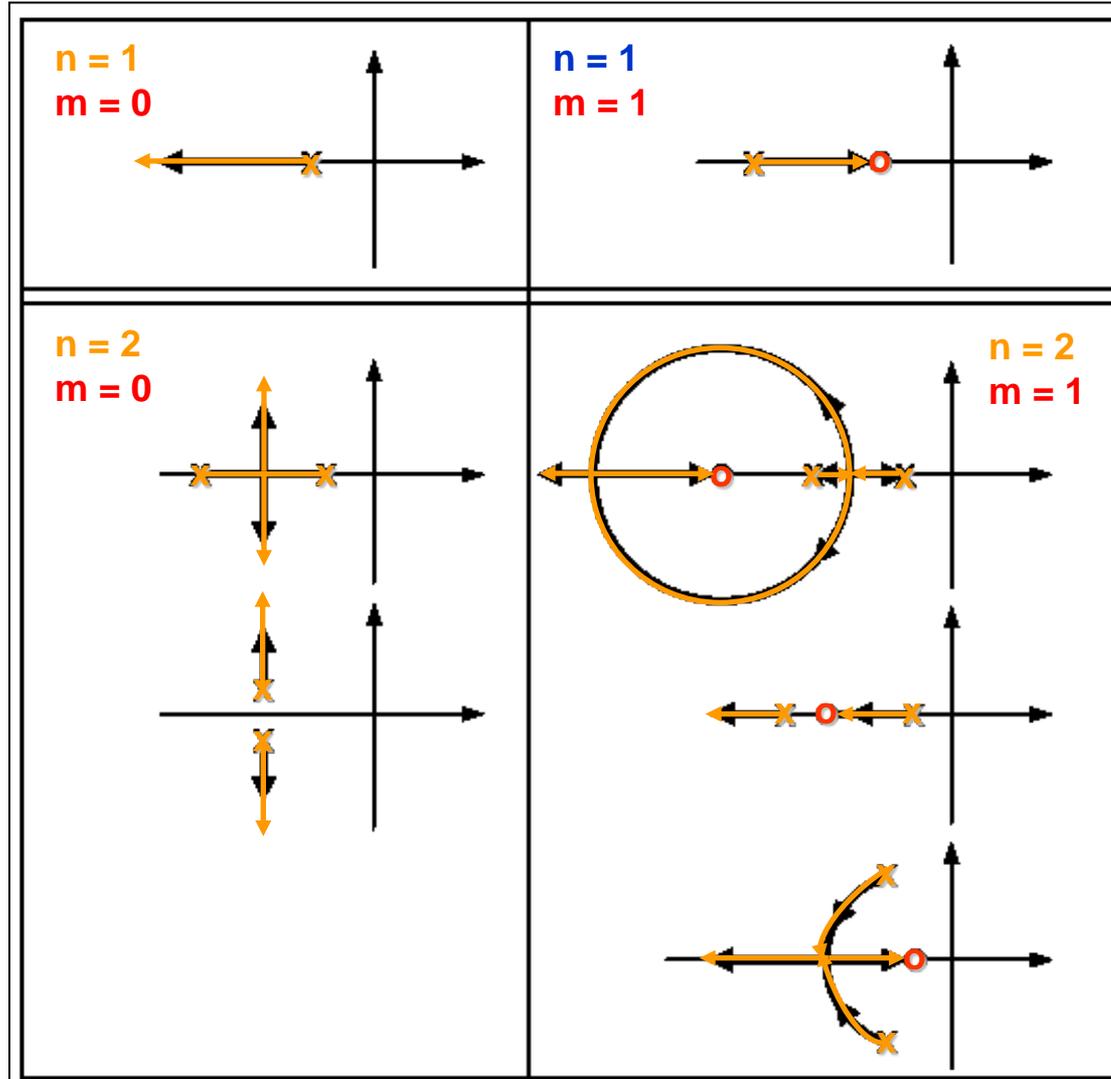


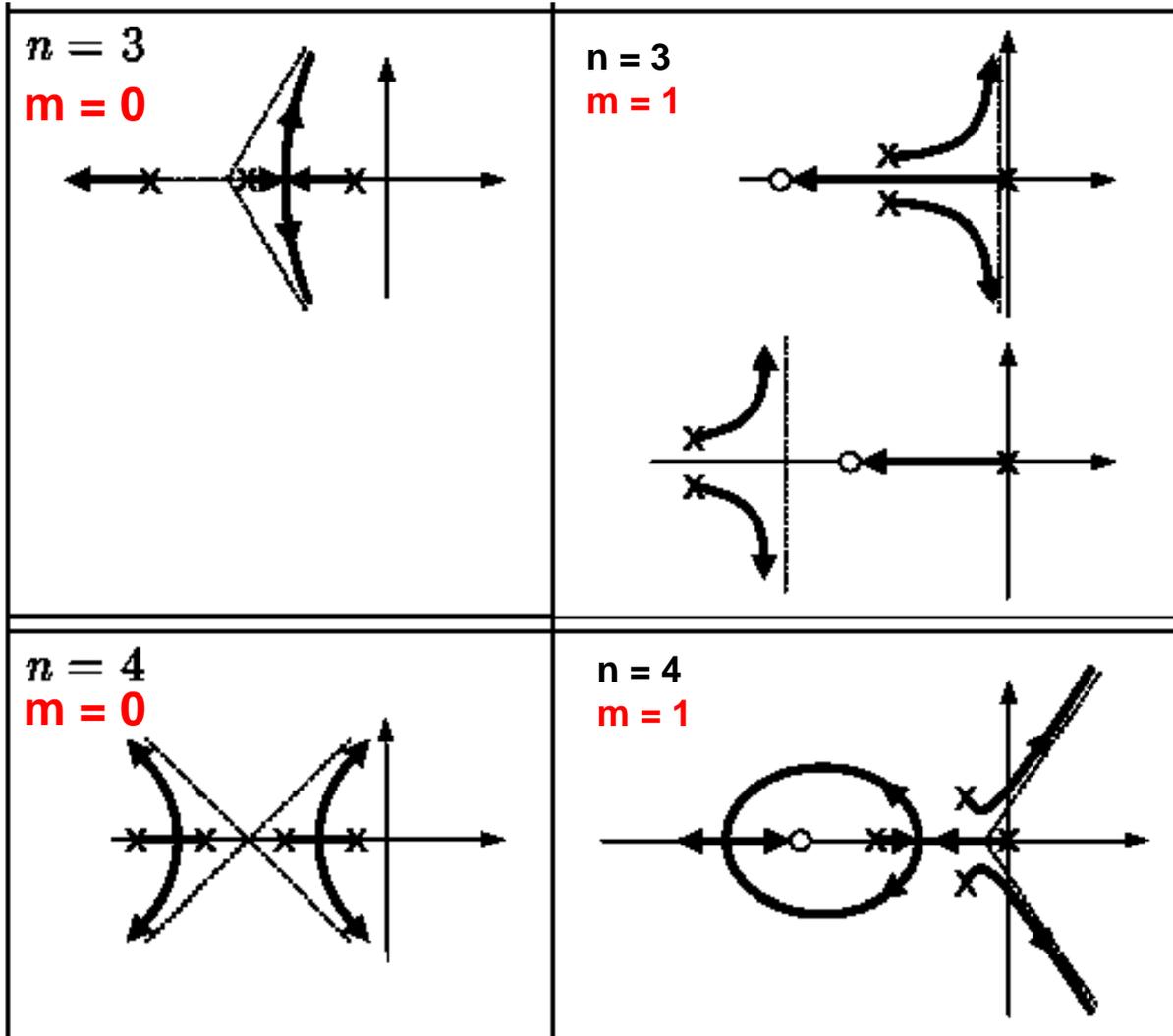
Eigenschaften:

Dämpfungsgrad $D \approx 0,75$

Eigenfrequenz $\omega_0 \approx 3$







Folgerungen:

1. **Besitzt $G_0(s)$ Nullstellen in der rechten s-Halbebene, so wird der geschlossene Regelkreis für große Kreisverstärkungen immer instabil.**
2. **Diese Beschränkungen gelten auch dann, wenn der Differenzgrad $(n-m)$ der Übertragungsfunktion $G_0(s)$ größer als 2 ist.**