Min $f(r, H) = 2r^2\pi\,p_1 + 2r\pi H p_2$

u.d.N. $h(r, H) = r^2\pi H - V = 0$

Auflosen der Nebenbedingung nach H:

$$H = H(r) = \frac{V}{r^2\pi} \qquad (r \neq 0)$$

Es gilt:

$$h(r, H(r)) = 0 \qquad \forall r \neq 0.$$

Einsetzen von $H(r)$ in Zielfunktion:

$$F(r) := f(r, H(r)) = 2r^2\pi\,p_1 + \frac{2Vp_2}{r}$$

Aufgabe:

Min $F(r)$ bzgl. $r \in \mathbb{R}$

unrestringiertes Optimierungsproblem

Notwendige Bedingung für ein lokales Minimum $\hat{r}$ von F:

$$(\hat{H} = H(\hat{r}))$$

$$0 = F'(\hat{r})$$

$$(*) \qquad = f'_r(\hat{r},\hat{H}) + f'_H(\hat{r},\hat{H}) \cdot H'(\hat{r})$$

Wie bekomme ich $H'(\hat{r})$?

Ich weiß

$$0 = h(r, H(r)) \quad \forall r \neq 0$$

$$\overset{\frac{d}{dr}}{\Rightarrow} \quad 0 = h'_r(\hat{r},\hat{H}) + h'_H(\hat{r},\hat{H}) \cdot H'(\hat{r})$$

Falls $h'_H(\hat{r},\hat{H}) \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{H'(\hat{r}) = - h'_H(\hat{r},\hat{H})^{-1} \, h'_r(\hat{r},\hat{H})}$$

Konkret: $h'_H(\hat{r},\hat{H}) = r^2 \pi \neq 0$ $(r \neq 0)$

Dann:

$$(*) \Rightarrow 0 = f'_r(\hat{r},\hat{H}) \underbrace{- f'_H(\hat{r},\hat{H}) \cdot h'_H(\hat{r},\hat{H})^{-1}}_{=: \mu} \cdot h'_r(\hat{r},\hat{H})$$

$$= f'_r(\hat{r},\hat{H}) + \mu \, h'_r(\hat{r},\hat{H})$$

mit $\mu = - f'_H(\hat{r},\hat{H}) \, h'_H(\hat{r},\hat{H})^{-1}$

bzw.

$$0 = f'_H(\hat{r}, \hat{H}) + \mu\, h'_H(\hat{r}, \hat{H})$$

Definiere Lagrange-Funktion

$$L(r, H, \mu) := f(r, H) + \mu\, h(r, H)$$

Damit ist notwendig:

$$0 = \nabla_{(r,H)} L(\hat{r}, \hat{H}, \mu)$$

bzw.

$$0 = f'_H(\hat{r}, \hat{H}) + \mu\, h'_H(\hat{r}, \hat{H})$$

Definiere <u>Lagrange-Funktion</u>

$$L(r, H, \mu) := f(r, H) + \mu\, h(r, H)$$

Damit ist <u>notwendig</u>:

$$0 = \nabla_{(r,H)} L(\hat{r}, \hat{H}, \mu)$$

$$L'_r = f'_r + \mu\, h'_r$$

$$L'_H = f'_H + \mu\, h'_H$$

$$\nabla_{(r,H)} L = \begin{pmatrix} L'_r \\ L'_H \end{pmatrix}$$

Auflösbarkeit

1) $h(y,z) := y^2 + z - 1 = 0$

$\frac{\partial h}{\partial z}(y,z) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ Satz über impl. Fktn. $z(y) = 1 - y^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^*$

2) $h(y,z) = \cancel{y^2}\ z^2 + y - 1 = 0$

$z(y) = \pm\sqrt{1-y}$

- nur definiert für $y \leq 1$
- 2 Lösungen

  $z_1(y) = +\sqrt{1-y}$

  $z_2(y) = -\sqrt{1-y}$
- nicht diffbar in $y = 1$

kritischer Punkt: $(\hat{y}, \hat{z}) = (1, 0)$

$\frac{\partial h}{\partial z}(y,z) = 2z$, $\frac{\partial h}{\partial z}(\hat{y}, \hat{z}) = 0$ singulär

Voraussetzung des Satzes über impl. Fktn. nicht erfüllt

$$z(y) = \pm\sqrt{1-y}$$

- nur definiert für $y \leq 1$
- 2 Lösungen

$$z_1(y) = +\sqrt{1-y}$$

$$z_2(y) = -\sqrt{1-y}$$