Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. M. Gerdts, Dr. A. Dreves

Frühjahrstrimester 2019

7. Übung in Optimierung

22) Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\min f(x) = x_1^2 + 4x_2 + x_2^2 \quad \text{u.d.N.} \quad g(x) = -x_2 \leq 0$$

und die Penalty-Funktion

$$P(x;\eta) := f(x) + \frac{\eta}{2}\max\{0, g(x)\}^2.$$

(a) Bestimmen Sie die globale Lösung $\hat{x}$ des Optimierungsproblems und den zugehörigen Multiplikator $\hat{\lambda}$.

(b) Berechnen Sie für $\eta > 0$ das globale Minimum $x(\eta)$ von $P(x;\eta)$.

(c) Zeigen Sie $\lim_{\eta\to\infty} x(\eta) = \hat{x}$ und $\lim_{\eta\to\infty} \eta \max\{0, g(x(\eta))\} = \hat{\lambda}$.

(d) Wie verhält sich die Konditionszahl der Hessematrix $\nabla_{xx}^2 P(x(\eta);\eta)$ für $\eta \to \infty$?

23) Betrachten Sie die Optimierungsprobleme

$$\min x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 \qquad \text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 - 1 = 0, \tag{1}$$

$$\min x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{\eta}{2}(x_1 + x_2 - 1)^2 \quad \text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 - 1 = 0. \tag{2}$$

(a) Berechnen Sie den KKT-Punkt $(\bar{x}, \bar{\mu})$ des Problems (1).

(b) Finden Sie ein $\bar{\eta} > 0$, so dass für alle $\eta > \bar{\eta}$ der in (a) berechnete KKT-Punkt globales unrestringiertes Minimum der Lagrangefunktion

$$L_a(\cdot, \bar{\mu}, \eta) := x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{\eta}{2}(x_1 + x_2 - 1)^2 + \bar{\mu}(x_1 + x_2 - 1)$$

des Problems (2) ist, wobei der Multiplikator $\bar{\mu}$ fix ist.

24) Gegeben sei das restringierte Optimierungsproblem

$$\min x_1 + x_2 \quad \text{u.d.N.} \quad x_1^2 - x_2 = 0.$$

Berechnen Sie mit dem Lagrange-Newton-Verfahren für $x^{[0]} = 0$ und $\mu^{[0]} \neq 0$ die Lösung des Problems. Welchen Einfluss hat der Startwert $\mu^{[0]}$?

Lösungen

22) a) Mit der Lagrangefunktion $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + 4x_2 + x_2^2 - \lambda x_2$ lauten die KKT-Bedingungen:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4 + 2x_2 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad \lambda x_2 = 0.$$

Es folgt sofort $x_1 = 0$. Wäre $\lambda = 0$, so wäre $x_2 = -2$, was aber nicht zulässig ist. Also ist $\lambda > 0$ und damit muss $x_2 = 0$ sein, und wir erhalten den KKT-Punkt

$$(\hat{x}, \hat{\lambda}) = (0, 0, 4).$$

In diesem gilt $f(\hat{x}) = 0$ und da $f(x) \geq 0$ für alle zulässigen Punkte ist, haben wir das globale Minimum gefunden.

(b) Für $\eta > 0$ ist die Penalty-Funktion

$$P(x; \eta) = x_1^2 + 4x_2 + x_2^2 + \frac{\eta}{2} \max\{0, -x_2\}^2.$$

Sie ist differenzierbar mit

$$\nabla_x P(x; \eta) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4 + 2x_2 \end{pmatrix}, & \text{falls } x_2 > 0, \\ \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4 + 2x_2 + \eta x_2 \end{pmatrix}, & \text{falls } x_2 \leq 0. \end{cases}$$

Aus der notwendigen Bedingung $\nabla_x P(x; \eta) = 0$ folgt sofort $x_1 = 0$. Die Annahme $x_2 > 0$ führt auf die Bedingung $0 = 4 + 2x_2$ und $x_2 = -2$, was einen Widerspruch darstellt. Also muss $x_2 \leq 0$ gelten. Damit folgt $0 = 4 + 2x_2 + \eta x_2$ und $x_2 = -\frac{4}{2+\eta} < 0$. Wir erhalten

$$x(\eta) = \left(0, -\frac{4}{2+\eta}\right)^\top.$$

Es ist ein globales Minimum, da $P(x; \eta)$ eine konvexe Funktion ist.

(c) Es gelten

$$\lim_{\eta \to \infty} x(\eta) = \lim_{\eta \to \infty} \left(0, -\frac{4}{2+\eta}\right)^\top = (0, 0)^\top = \hat{x},$$
$$\lim_{\eta \to \infty} \eta \max\{0, -x_2(\eta)\} = \lim_{\eta \to \infty} \eta \frac{4}{2+\eta} = 4 = \hat{\lambda}.$$

(d) Wegen $x_2(\eta) < 0$ für alle $\eta > 0$ lautet die Hessematrix

$$H := \nabla_{xx}^2 P(x(\eta); \eta) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 + \eta \end{pmatrix}.$$

Sie ist symmetrisch mit Eigenwerten 2 und $2 + \eta$ und die spektrale Konditionszahl lautet

$$cond_2(H) = \frac{2 + \eta}{2} \xrightarrow{\eta \to \infty} \infty.$$

23) (a) Die Lagrangefunktion von (1) ist

$$L(x,\mu) = x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + \mu(x_1 + x_2 - 1).$$

Damit lauten die KKT-Bedingungen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + \mu \\ -x_2 + \mu \end{pmatrix}, \qquad x_1 + x_2 - 1 = 0.$$

Hieraus ergibt sich die eindeutige Lösung $\bar{x} = (-1, 2)$ und $\bar{\mu} = 2$.

(b) Setzen wir $\bar{\mu} = 2$ in die Lagrangefunktion des Problems (2) ein so erhalten wir die Funktion

$$L_a(x, 2, \eta) := x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{\eta}{2}(x_1 + x_2 - 1)^2 + 2(x_1 + x_2 - 1)$$

Im KKT-Punkt verschwindet der Gradient, denn es gilt

$$\nabla_x L_a(\bar{x}, 2, \eta) = \begin{pmatrix} 2\bar{x}_1 + \eta(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 1) + 2 \\ -\bar{x}_2 + \eta(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 1) + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-1) + \eta \cdot 0 + 2 \\ -2 + \eta \cdot 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Hessematrix erhalten wir

$$\nabla_{xx}^2 L_a(x, 2, \eta) = \begin{pmatrix} 2 + \eta & \eta \\ \eta & -1 + \eta \end{pmatrix}.$$

Für diese symmetrische Matrix berechnen wir die Eigenwerte mittels

$$0 = (2 + \eta - \lambda)(-1 + \eta - \lambda) - \eta^2 = \lambda^2 - \lambda(2\eta + 1) + (\eta - 2),$$

also

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(2\eta + 1 \pm \sqrt{(2\eta + 1)^2 - 4(\eta - 2)}) = \frac{1}{2}(2\eta + 1 \pm \sqrt{4\eta^2 + 9}).$$

Wir erkennen, dass für $\eta > 2$ stets

$$(2\eta + 1)^2 = 4\eta^2 + 4\eta + 1 > 4\eta^2 + 9$$

gilt, und somit sind die Eigenwerte der Hessematrix für alle $\eta > 2$ positiv und damit die Matrix positiv definit. Damit ist $L_a(x, 2, \eta)$ nach Satz 3.2.3 für alle $\eta > 2$ strikt konvex und folglich ist nach Satz 3.2.2 der stationäre Punkt eindeutiges globales Minimum.

Bemerkung: Die Existenz eines $\bar{\eta} > 0$ mit der Eigenschaft, dass KKT-Punkte von (1) strikte lokale Minima der erweiterten Lagrangefunktion $L_a(x, \bar{\mu}, \eta)$ sind, folgt aus Hilfssatz 5.6.1. Dieser sagt jedoch nichts über die Größe von $\bar{\eta}$ aus.

24) Mit der Lagrangefunktion $L(x_1, x_2, \mu) = x_1 + x_2 + \mu(x_1^2 - x_2)$ erhalten wir

$$\nabla_{(x,\mu)} L(x_1, x_2, \mu) = \begin{pmatrix} 1 + 2\mu x_1 \\ 1 - \mu \\ x_1^2 - x_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad \nabla^2 L(x_1, x_2, \mu) = \begin{pmatrix} 2\mu & 0 & 2x_1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2x_1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit gehen wir in das Lgrange-Newton-Verfahren:

$k = 0$: $x^{[0]} = (0, 0)^\top$, $\mu^{[0]} = \alpha \neq 0$. Lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$d_1 = -\frac{1}{2\alpha}, \quad d_2 = 0, \quad v = 1 - \alpha$$

Neue Iterierte:

$$x_1^{[1]} = -\frac{1}{2\alpha}, \quad x_2^{[1]} = 0, \quad \mu^{[1]} = 1.$$

$k = 1$: Lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{\alpha} & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\alpha} \\ 0 \\ \frac{1}{4\alpha^2} \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$d_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha}, \quad d_2 = \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{4\alpha^2}, \quad v = 0$$

Neue Iterierte:

$$x_1^{[2]} = -\frac{1}{2}, \quad x_2^{[2]} = \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{4\alpha^2}, \quad \mu^{[2]} = 1.$$

$k = 2$: Lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2} \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$d_1 = 0, \quad d_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2}, \quad v = 0$$

Neue Iterierte:

$$x_1^{[3]} = -\frac{1}{2}, \quad x_2^{[3]} = \frac{1}{4}, \quad \mu^{[3]} = 1.$$

Dies ist bereits die Lösung!

Für den Startwert $\mu^{[0]} = 1$ hat man die Lösung bereits für $k = 1$, ansonsten für $k = 2$.