Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. M. Gerdts, Dr. A. Dreves

Universität der Bundeswehr München

Frühjahrstrimester 2019

6. Übung in Optimierung

19) Bestimmen Sie unter Verwendung der KKT-Bedingungen, sowie der notwendigen und hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung die lokalen Minima des Optimierungsproblems

$$\min -\frac{1}{10}(x_1-4)^2 + x_2^2 \quad \text{u.d.N.} \quad 1 - x_1^2 - x_2^2 \leq 0.$$

20) Betrachten Sie das konvexe Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min\ f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1,\dots,m, \\ & a_j^\top x = b_j \quad \forall j = 1,\dots,p \end{aligned}$$

mit konvexen und differenzierbaren Funktionen $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für alle $i = 1,\dots,m$ und $a_j \in \mathbb{R}^n, b_j \in \mathbb{R}$ für alle $j = 1,\dots,p$. Zeigen Sie, dass für jeden KKT-Punkt $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$ dieses Problems, $\bar{x}$ eine Lösung des Problems ist.

21) Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\min \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2)^2 + x_1 \quad \text{u.d.N.} \quad 1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0.$$

(a) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen dieses Problems als Gleichungssystem in der Form $H(x, \lambda) = 0$. Verwenden Sie dazu die Minimumsfunktion um die Komplementaritätsbedingungen in eine Gleichung zu verwandeln.

(b) Zeigen Sie, dass der Lagrange-Multiplikator in einem KKT-Punkt nicht Null sein kann. Zeigen Sie damit, dass die Funktion H in einer Umgebung eines KKT-Punktes differenzierbar und die Jacobimatrix regulär ist.

(c) Was kann man über die Konvergenz des lokalen Newton-Verfahrens angewandt auf das Gleichungssystem $H(x, \lambda) = 0$ sagen?

Lösungen

19) Zunächst stellen wir fest, dass es kein globales Minimum geben kann, denn es gilt

$$\lim_{x_1 \to \infty} f(x_1, 0) = -\infty.$$

Da nur eine Nebenbedingung vorliegt, und deren Gradient in allen zulässigen Punkten nicht der Nullvektor ist, ist zwangsläufig LICQ erfüllt und die KKT-Bedingungen sind notwendige Optimalitätskriterien. Die Lagrangefunktion lautet

$$L(x, \lambda) = -\frac{1}{10}(x_1 - 4)^2 + x_2^2 + \lambda(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

und die KKT-Bedingungen

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} -0.2(x_1 - 4) - 2\lambda x_1 \\ 2x_2 - 2\lambda x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda \geq 0, \qquad & 1 - x_1^2 - x_2^2 \leq 0, \qquad \lambda(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0. \end{aligned}$$

Ferner erhalten wir die Hessematrix

$$\nabla_{xx}^2 L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} -0.2 - 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 - 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Ist die Restriktion aktiv, so haben wir den kritischen Kegel

$$\begin{aligned} T_K(x) &= \{d \in \mathbb{R}^2 \mid \nabla g(x)^\top d = 0 \wedge \lambda > 0, \nabla g(x)^\top d \leq 0 \wedge \lambda = 0\} \\ &= \{d \in \mathbb{R}^2 \mid -2x_1 d_1 - 2x_2 d_2 = 0 \wedge \lambda > 0, -2x_1 d_1 - 2x_2 d_2 \leq 0 \wedge \lambda = 0\}. \end{aligned}$$

Ist sie inaktiv, so ist der kritische Kegel $\mathbb{R}^2$. Da die Hessematrix $\begin{pmatrix} -0.2 - 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 - 2\lambda \end{pmatrix}$ wegen $\lambda \geq 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ nie positiv semidefinit sein kann, muss die Ungleichung aktiv sein, also gilt $g(x) = 0$. Die notwendige positive Semidefinitheit auf $T_K(x)$ impliziert

$$-(0.2 + 2\lambda)d_1^2 + 2(1 - \lambda)d_2^2 \geq 0 \qquad \forall d \in T_K(x).$$

Aus der zweiten Gleichung von $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ folgt $\lambda = 1$ oder $x_2 = 0$. Für $\lambda = 1$ folgt aber aus der positiven Semidefinitheit der Hessematrix, dass nur $d_1 = 0$ im kritischen Kegel sein darf. Dies geht nur, wenn $x_2 = 0$ ist. Es muss also in jedem Fall $x_2 = 0$ gelten. Aus der aktiven Restriktion folgt dann $x_1 = \pm 1$. Für $x_1 = -1$ muss $\lambda = -\frac{1}{2}$ sein, was aber $\lambda \geq 0$ widerspricht. Im anderen Fall erhält man den KKT-Punkt

$$(x_1, x_2, \lambda) = \left(1, 0, \frac{3}{10}\right).$$

In diesem ist der kritische Kegel

$$T_K(x) = \{d \in \mathbb{R}^2 \mid -2d_1 = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; d_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

und somit

$$d^\top \nabla^2_{xx} L(x,\lambda) d = 1.4 d_2^2 > 0 \qquad \forall d \in T_K(x) \setminus \{0\}.$$

Damit ist die hinreichende Bedingung 2. Ordnung erfüllt und der KKT-Punkt ist (striktes) lokales Minimum.

20) Sei $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$ ein KKT-Punkt (also ist $\bar{x}$ zulässig) und

$$\mathcal{A}(\bar{x}) := \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$$

die Menge der aktiven Ungleichungen. Ferner sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger zulässiger Punkt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
f(x) &\overset{f \text{ konvex}}{\geq} f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^\top (x - \bar{x}) \\
&\overset{KKT}{=} f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x})^\top (x - \bar{x}) - \sum_{j=1}^p \bar{\mu}_j \underbrace{a_j^\top (x - \bar{x})}_{=b_j - b_j = 0} \\
&= f(\bar{x}) - \sum_{i \in \mathcal{A}(\bar{x})} \underbrace{\bar{\lambda}_i}_{\geq 0} \underbrace{\nabla g_i(\bar{x})^\top (x - \bar{x})}_{\leq g_i(x) - g_i(\bar{x}) = g_i(x) \leq 0} \\
&\geq f(\bar{x}),
\end{aligned}$$

also ist $\bar{x}$ Lösung.

21) (a) Die Lagrangefunktion ist

$$L(x,\lambda) := \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2)^2 + x_1 - \lambda(1 - x_1^2 - x_2^2).$$

Damit sind die KKT-Bedingungen gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla_x L(x,\lambda) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 1 + 2\lambda x_1 \\ 4x_2 - 2x_1 + 2\lambda x_2 \end{pmatrix}$$

und die Komplementarität

$$\lambda \geq 0, \quad 1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0, \quad \lambda(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0.$$

Diese Bedingungen sind äquivalent zu

$$\min\{\lambda, 1 - x_1^2 - x_2^2\} = 0.$$

Damit haben wir das zu den KKT-Bedingungen äquivalente Gleichungssystem

$$0 = H(x,\lambda) := \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 1 + 2\lambda x_1 \\ 4x_2 - 2x_1 + 2\lambda x_2 \\ \min\{\lambda, 1 - x_1^2 - x_2^2\} \end{pmatrix}.$$

(b) Wäre in einem KKT-Punkt der Lagrange-Multiplikator $\bar{\lambda} = 0$, so folgt durch Addition der doppelten ersten und der zweiten Gleichung der Widerspruch $2 = 0$. Also muss in einem KKT-Punkt, d.h. in einer Lösung von $H(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$, stets $\bar{\lambda} > 0$ gelten. Aus der letzten Gleichung von H folgt dann aber im KKT-Punkt $1 - \bar{x}_1^1 - \bar{x}_2^2 = 0$. Ferner ist in einer hinreichend kleinen Umgebung U von $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ immer noch $1 - x_1^2 - x_2^2 < \lambda$ und damit gilt auf ganz U

$$H(x, \lambda) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 1 + 2\lambda x_1 \\ 4x_2 - 2x_1 + 2\lambda x_2 \\ 1 - x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Also ist H auf U differenzierbar mit der Jacobimatrix

$$JH(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \begin{pmatrix} 1 + 2\bar{\lambda} & -2 & 2\bar{x}_1 \\ -2 & 4 + 2\bar{\lambda} & 2\bar{x}_2 \\ -2\bar{x}_1 & -2\bar{x}_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Determinante gilt

$$\det(JH(\bar{x}, \bar{\lambda})) = 16\bar{x}_1\bar{x}_2 + (16 + 8\bar{\lambda})\bar{x}_1^2 + (4 + 8\bar{\lambda})\bar{x}_2^2 = (4\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2)^2 + 8\bar{\lambda}(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2).$$

Also ist $\det(JH(\bar{x}, \bar{\lambda})) > 0$ für alle $\bar{x} \neq (0, 0), \bar{\lambda} \geq 0$. Da $x = (0, 0)$ (und damit $\lambda = 0$) aber kein KKT-Punkt sein kann, ist die Jacobimatrix in jedem KKT-Punkt regulär.

(c) Da die Jacobimatrix linear ist, ist sie lokal Lipschitz-stetig. Somit liefert die Regularität der Jacobimatrix in einem KKT-Punkt die quadratische Konvergenz des lokalen Newton-Verfahrens (in U) angewandt auf das Gleichungssystem $H(x, \lambda) = 0$.