Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. M. Gerdts, Dr. A. Dreves

Universität der Bundeswehr München

Frühjahrstrimester 2019

3. Übung in Optimierung

9) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Konvexität:

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x}$.

   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

   (c) $h : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ \sin(x), & x < 0. \end{cases}$

10) Finden Sie jeweils ein Beispiel dafür, dass

   (a) die Verkettung konvexer Funktionen

   (b) eine abschnittsweise durch konvexe Funktionen definierte Funktion

   (c) das punktweise Minimum konvexer Funktionen

   nicht konvex sein muss.

11) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und konvex. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ genau dann konvex ist, wenn ihr Epigraph, d.h. die Menge

$$epi(f) := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\},$$

   eine konvexe Teilmenge von $X \times \mathbb{R}$ ist.

12) Eine Schrittweitenstrategie $(x, d) \mapsto \alpha$ heißt effizient, wenn es zu $x^{[0]} \in \mathbb{R}^n$ eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$f(x + \alpha d) \leq f(x) - C \left(\frac{\nabla f(x)^\top d}{\|d\|} \right)^2$$

   für alle $x \in lev(f, f(x^{[0]}))$ und $d \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x)^\top d < 0$, und alle von der Schrittweitenstrategie gelieferten Schrittweiten α gibt.

   Zeigen Sie anhand der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2$ und dem Startvektor $x^{[0]} = (1, 1)$, dass die Armijo-Regel in obigem Sinne nicht effizient ist.