Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. M. Gerdts, Dr. A. Dreves

Universität der Bundeswehr München

Frühjahrstrimester 2019

# 3. Übung in Optimierung

9) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Konvexität:

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x}$.

   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

   (c) $h : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ \sin(x), & x < 0. \end{cases}$

10) Finden Sie jeweils ein Beispiel dafür, dass

   (a) die Verkettung konvexer Funktionen

   (b) eine abschnittsweise durch konvexe Funktionen definierte Funktion

   (c) das punktweise Minimum konvexer Funktionen

   nicht konvex sein muss.

11) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und konvex. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ genau dann konvex ist, wenn ihr Epigraph, d.h. die Menge

$$epi(f) := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\},$$

   eine konvexe Teilmenge von $X \times \mathbb{R}$ ist.

12) Eine Schrittweitenstrategie $(x, d) \mapsto \alpha$ heißt effizient, wenn es zu $x^{[0]} \in \mathbb{R}^n$ eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$f(x + \alpha d) \leq f(x) - C \left( \frac{\nabla f(x)^\top d}{\|d\|} \right)^2$$

   für alle $x \in lev(f, f(x^{[0]}))$ und $d \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x)^\top d < 0$, und alle von der Schrittweitenstrategie gelieferten Schrittweiten $\alpha$ gibt.

   Zeigen Sie anhand der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2$ und dem Startvektor $x^{[0]} = (1, 1)$, dass die Armijo-Regel in obigem Sinne nicht effizient ist.

## Lösungen

9) (a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$ ist nach Satz 3.2.3 (b) (strikt) konvex, denn die zweite Ableitung

$$f''(x) = e^{-x}$$

ist stets positiv.

(b) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ist für $x \neq 0$ zweimal stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, \\ g''(x) &= -\frac{6}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{4}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{4-6x^2}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

Nach mehrmaliger Anwendung der Regel von L'Hospital erkennt man, dass die Ableitungen beide durch $g'(0) = 0$ und $g''(0) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig werden. Damit ist $g$ zweimal stetig differenzierbar. Nach Satz 3.2.3 (b) ist $g$ nicht konvex, denn die zweite Ableitung ist für $|x| > \sqrt{\frac{2}{3}}$ negativ.

(c) Die Funktion $h : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ \sin(x), & x < 0 \end{cases}$ ist zweimal stetig differenzierbar mit Ableitungen

$$\begin{aligned} h'(x) &= \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ \cos(x), & x < 0, \end{cases} \\ h'(x) &= \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ -\sin(x), & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Da $-\sin(x) > 0$ für alle $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, gilt $h''(x) \geq 0$ für all $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nach Satz 3.2.3 (b) ist $h$ konvex.

10) (a) Die Funktionen $f(x) = -x$ und $g(x) = x^2$ sind beide konvex, jedoch ist $f(g(x)) = -x^2$ nicht konvex.

(b) Die Funktion $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ -x, & x > 0 \end{cases} = -|x|$ ist eine abschnittsweise lineare, also abschnittsweise konvexe Funktion, jedoch ist $f(x)$ nicht konvex.

(c) Die Funktion $f(x) = \min\{-x, x\} = -|x|$ ist als punktweises Minimum konvexer Funktionen selbst nicht konvex.

11) $\Rightarrow$: Sei $f : X \to \mathbb{R}$ konvex. Für beliebige $(x, r), (y, s) \in epi(f)$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt dann

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda r + (1-\lambda)s.$$

Damit ist aber $(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda r + (1-\lambda)s) \in epi(f)$. Da $(x,r),(y,s) \in epi(f)$ und $\lambda \in (0,1)$ beliebig waren, ist die Menge $epi(f)$ konvex.

$\Leftarrow$: Sei die Menge $epi(f)$ konvex und seien beliebige $x, y \in X$ und $\lambda \in (0,1)$ gewählt. Dann gilt für alle $r \geq f(x)$ und alle $s \geq f(y)$, dass $(x,r),(y,s) \in epi(f)$ sind. Da $epi(f)$ konvex ist, folgt also auch

$$\lambda(x,r) + (1-\lambda)(y,s) \in epi(f) \quad \text{für alle} \quad r \geq f(x), s \geq f(y),$$

Speziell für $r = f(x)$ und $s = f(y)$ folgt

$$\lambda(x, f(x)) + (1-\lambda)(y, f(y)) = (\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) \in epi(f),$$

und dies ist gleichbedeutend mit

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

also ist $f$ konvex, da $x, y \in X$ und $\lambda \in (0,1)$ beliebig gewählt waren.

12) Betrachte alle $(x,x) \in lev(f,2) \setminus \{(0,0)\}$. Für diese ist $d = (-x^3, -x^3)$ eine Abstiegsrichtung, da $\nabla f(x,x)^\top d = (2x, 2x)^\top(-x^3, -x^3) = -4x^4 < 0$ gilt. Aus der Armijo-Bedingung folgt

$$\begin{aligned}
& f(x+\alpha d, y+\alpha d) - f(x,y) && \leq \sigma\alpha\nabla f(x,y)^\top d \\
\Leftrightarrow \quad & 2(x-\alpha x^3)^2 - 2x^2 && \leq -4\sigma\alpha x^4 \\
\Leftrightarrow \quad & 2\alpha^2 x^6 - 4\alpha(1-\sigma)x^4 && \leq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \alpha && \leq \frac{2(1-\sigma)}{x^2}
\end{aligned}$$

Da die Armijoschrittweite durch 1 beschränkt ist, wird für hinreichend kleine $|x|$ immer die Schrittweite 1 angenommen.

Wäre die Armijo-Regel effizient, so gäbe es ein von $x$ unabhängiges $C > 0$, so dass

$$\begin{aligned}
& f(x+\alpha d, y+\alpha d) - f(x,y) && \leq -C\left(\frac{\nabla f(x,y)^\top d}{\|d\|}\right)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 2(x-x^3)^2 - 2x^2 && \leq -C\frac{16x^8}{2x^6} \\
\Leftrightarrow \quad & 2x^6 - 4x^4 && \leq -8Cx^2 \\
\Leftrightarrow \quad & C && \leq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4
\end{aligned}$$

Für $|x| \to 0$ geht die rechte Seite gegen Null. Damit gibt es aber keine von $x$ unabhängige Konstante $C > 0$, so dass die Effizienzbedingung erfüllt wäre. Dies zeigt, dass die Armijo-Regel nicht effizient ist.