Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. M. Gerdts, Dr. A. Dreves

Universität der Bundeswehr München

Frühjahrstrimester 2019

2. Übung in Optimierung

5) Für folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ veranschauliche man den Funktionsverlauf durch Skizzieren der Höhenlinien (d.h. der Kurven $f(x,y) = \text{const}$) und des Gradientenfeldes:

a) $f(x,y) = y + 2x$,

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,

c) $f(x,y) = x \cdot y$.

6) Gegeben sei die quadratische Funktion

$$f(x) := \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie den Gradienten von f im Punkt x. Beachten Sie hierbei, dass A im Allgemeinen nicht symmetrisch zu sein braucht.

b) Warum kann man bei der Minimierung von f ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass die Matrix A symmetrisch ist?

c) Spielt der konstante Term c bei der Minimierung von f eine Rolle?

7) Gegeben sei die Funktion $f(x,y) := 3x^4 - 4x^2y + y^2$. Zeigen Sie:

a) $(0,0)$ ist ein stationärer Punkt von f.

b) f besitzt längs jeder Ursprungsgeraden ein lokales Minimum in $(0,0)$.

c) $(0,0)$ ist kein lokales Minimum der Funktion f .

8) Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^2y^2 + (x^2-1)^2$.

a) Welche Informationen liefern die notwendigen und hinreichenden Bedingungen über die lokalen Minima und Maxima der Funktion f?

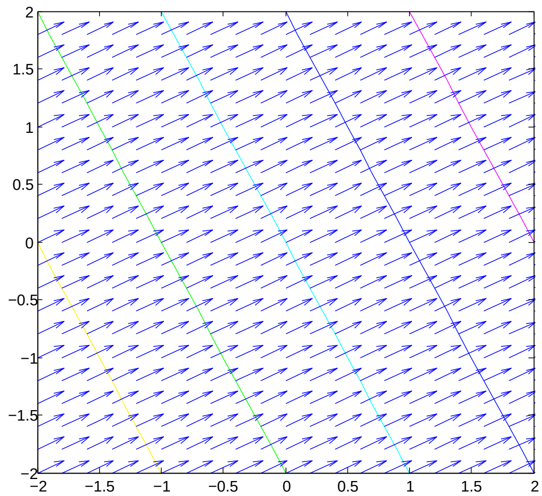
b) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Minima und Maxima von f.

c) Ist die Funktion f konvex?

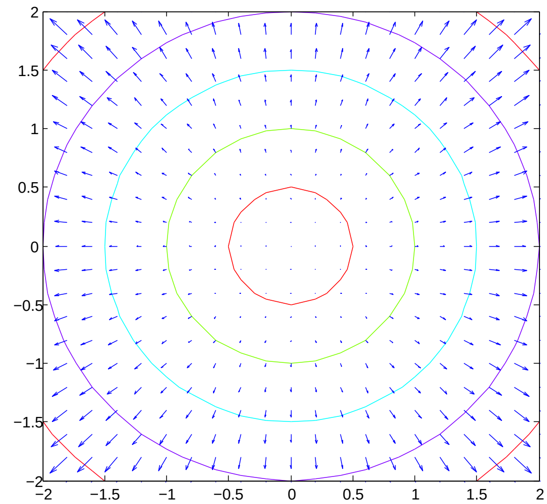
Lösungen

5)

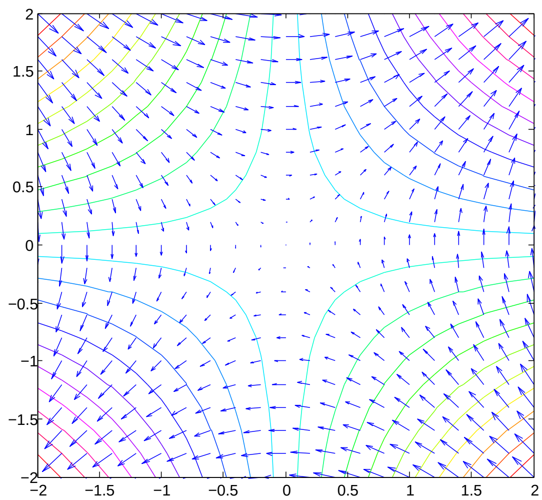
Aufgabe 5 a)



Aufgabe 5 b)



Aufgabe 5 c)



MATLAB-code für 5c):

```
figure
[X, Y]= meshgrid(-2:.2:2);
h = X.*Y;
DX=Y;
DY=X;
contour(X,Y,h,20)
hold on
quiver(X,Y,DX,DY)
colormap hsv
hold off
```

6) a) Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Dann ist

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c,$$

und es folgt für die partielle Ableitung von f nach $x_k, k = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{2}\sum_{i \neq k} a_{ik}x_i + \frac{1}{2}\sum_{j \neq k} a_{kj}x_j + \frac{1}{2}2a_{kk}x_k + b_k = \frac{1}{2}(A_{\bullet k})^T x + \frac{1}{2}A_{k\bullet}x + b_k.$$

Damit gilt $\nabla f(x) = \frac{1}{2}(A^T + A)x + b$.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(f(x)+f(x)^T) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^TAx + \frac{1}{2}x^TA^Tx\right] + b^Tx + c \\ &= \frac{1}{2}x^T\left[\frac{1}{2}(A+A^T)\right]x + b^Tx + c. \end{aligned}$$

Daher ändert sich die Zielfunktion f qualitativ nicht, wenn man A durch die symmetrische Matrix $\frac{1}{2}(A+A^T)$ ersetzt.

c) Die globalen Minimalstellen der Funktion f sind die gleichen wie die der Funktion $f-c$. Daher ändert die Konstante c zwar den optimalen Funktionswert, aber nicht die Lösungen.

7) a) Für $f(x,y) := 3x^4 - 4x^2y + y^2$ gilt $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^3 - 8xy \\ -4x^2 + 2y \end{pmatrix}$.

Damit ist $\nabla f(0,0) = (0,0)^T$, also ist $(0,0)$ ein stationärer Punkt.

b) Entlang der x-Achse gilt $y=0$, also $f(x,y) = 3x^4$, und entlang der y-Achse ist $x=0$ und damit $f(x,y) = y^2$. In beiden Fällen hat f in $(0,0)$ offensichtlich ein striktes lokales Minimum. Alle anderen Ursprungsgeraden haben die Form $y = kx$ mit $k \neq 0$. Dann folgt für $g(x) := f(x,kx)$:

$$g(x) = 3x^4 - 4kx^3 + k^2x^2 = 3x^4 + x^2(k^2 - 4kx)$$

Damit ist $g(x) > 0$ für alle $x \neq 0$ mit $|x| \leq \frac{|k|}{4}$. Wegen $g(0)=0$, ist 0 ein striktes lokales Minimum von g, und somit ist $(0,0)$ ein striktes lokales Minimum von f entlang jeder Ursprungsgeraden.

c) Für $y = 2x^2$ gilt

$$f(x,y) = 3x^4 - 8x^4 + 4x^4 = -x^4 < 0 = f(0,0)$$

für alle $x \neq 0$. Es gibt also in jeder Umgebung von $(0,0)$ einen Punkt $(x, 2x^2)$ mit $f(x,2x^2) < f(0,0)$, und somit ist $(0,0)$ kein lokales Minimum.

8) a) Für die Funktion $f(x,y) = x^2y^2 + (x^2-1)^2$ gilt

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 + 4x(x^2-1) \\ 2x^2y \end{pmatrix}.$$

Die notwendige Bedingung 1. Ordnung $\nabla f(x,y) = (0,0)^T$ liefert also die Kandidaten $x=0$ und y beliebig, oder $y=0$ und $x = \pm 1$. Das hinreichende Kriterium 2. Ordnung liefert, für Punkte mit $\nabla f(x,y) = (0,0)^T$, dass wenn $\nabla^2 f(x,y)$ positiv bzw. negativ definit ist, (x,y) ein Minimum bzw. Maximum ist. Es gilt

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 + 12x^2 - 4 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Nun ist $\nabla^2 f(0,y) = \begin{pmatrix} 2y^2-4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ positiv semidefinit für alle $|y| \geq \sqrt{2}$ und negativ semidefinit für alle $|y| < \sqrt{2}$, liefert also keine Aussage über Minima oder Maxima der Punkte $(0,y)$. Weiterhin ist $\nabla^2 f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ positiv definit, und somit hat f in $(\pm 1, 0)$ lokale Minima.

b) Wegen $\lim_{x\to\infty} f(x,y) = +\infty$ gibt es keine globalen Maxima. Wegen $f(x,y) \geq 0 = f(\pm 1, 0)$ sind die Punkte $(\pm 1, 0)$ globale Minima.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und seien δ_x, δ_y so, dass $(0+\delta_x, y+\delta_y) \in \mathcal{B}_\varepsilon(0,y)$ ist. Dann gilt

$$f(0+\delta_x, y+\delta_y) = \delta_x^2(y+\delta_y)^2 + (\delta_x^2-1)^2 = 1 + \delta_x^2(y^2 - 2 + 2y\delta_y + \delta_x^2 + \delta_y^2).$$

Für $|y| > \sqrt{2}$ existiert ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, so dass $(y^2-2+2y\delta_y+\delta_x^2+\delta_y^2) > 0$ für alle zulässigen δ_x, δ_y, und damit folgt in der gesamten Umgebung $f(0,y) = 1 \leq f(0+\delta_x, y+\delta_y)$, also ist $(0,y)$ ein lokales Minimum.

Für $|y| < \sqrt{2}$ existiert ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, so dass $(y^2-2+2y\delta_y+\delta_x^2+\delta_y^2) < 0$ für alle zulässigen δ_x, δ_y, und damit folgt in der gesamten Umgebung $f(0,y) = 1 \geq f(0+\delta_x, y+\delta_y)$, also ist $(0,y)$ ein lokales Maximum.

Für $|y| = \sqrt{2}$ existieren (δ_x, δ_y) mit $\delta_x \neq 0$, so dass $(y^2 - 2 + 2y\delta_y + \delta_x^2 + \delta_y^2)$ sowohl negative als auch positive Werte annimmt. Also können keine lokalen Extrema vorliegen.

Wegen $f(0,y) = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ sind die lokalen Extrema nicht global und auch keine strikten Minima.

c) Die Funktion kann nach Satz 3.2.2 nicht konvex sein, da die Menge der globalen Minima nicht konvex ist.