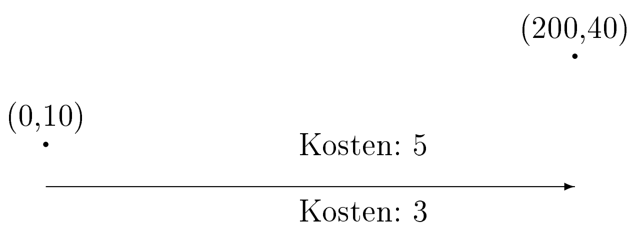
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. M. Gerdts, Dr. A. Dreves

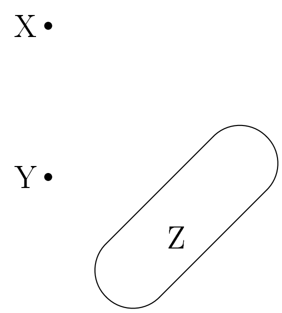
Frühjahrstrimester 2019

1. Übung Optimierung

1) Ein Flugzeug mit beliebig steuerbarem Lenkwinkel befindet sich beim Start im Punkt $(0, 10)$ und möchte nach $(200, 40)$ fliegen. Die x-Achse sei dabei eine Landesgrenze an der sich die Überflugkosten ändern, und zwar sind diese 5 Geld- pro Längeneinheiten im Bereich $x > 0$ und 3 für $x \leq 0$. Finden Sie die kostengünstigste Flugroute.



Aufgabe 1



Aufgabe 2

2) Zwei Flugzeuge X und Y befinden sich in den Startpositionen $x(0) = x_0$ bzw. $y(0) = y_0$. Beide sollen mit der gleichen Geschwindigkeit v fliegen, und der Lenkwinkel soll beliebig steuerbar sein. Das Flugzeug X versucht seinen Abstand zu einem Zielgebiet Z zu minimieren, bevor es von Y abgefangen wird. Das Flugzeug Y versucht das Gebiet Z zu schützen, indem es den Abstand von X zum Zielgebiet maximiert. Dabei nehmen wir an, dass Flugzeug X nicht mehr weiter fliegen kann, sobald es von Y abgefangen ist, d.h. den Abstand Null hat. Überlegen Sie sich wie eine einfache Dynamik der Flugzeuge aussehen könnte, formulieren Sie die Ziele als Optimierungsprobleme, und überlegen Sie sich geometrisch, wie die jeweils optimalen Flugrouten aussehen.

3) Nach einem Flugausfall von San-Francisco nach New York sollen möglichst viele der Passagiere auf Ausweichflüge mit Umsteigen (und jeweils gesicherten Anschlussflügen) umgebucht werden. Dabei stehen die in der Tabelle angegebenen Sitzplätze zur Verfügung. Formulieren Sie ein Optimierungsproblem zur Bestimmung der maximal möglichen Anzahl von Passagieren, die über diese Flüge von San-Francisco nach New York gelangen können und versuchen Sie es zu lösen.

von	nach	freie Plätze
San Francisco	Denver	5
San Francisco	Houston	6
Denver	Atlanta	4
Denver	Chicago	2
Houston	Atlanta	5
Atlanta	New York	7
Chicago	New York	4

4) In der KO-Runde der Fußball Champions-League wird über das Weiterkommen in einem Hin- und Rückspiel über zweimal 90 Minuten entschieden, wobei es ggf. im Rückspiel eine 30 minütige Verlängerung und anschließendes Elfmeterschießen geben kann. Für einen Sieg gibt es drei Punkte, für ein Unentschieden einen Punkt. Über das Weiterkommen wird sukzessive nach folgenden Regeln entschieden:

1. Die Mannschaft mit den mehr erzielten Punkten kommt weiter.
2. Die Mannschaft mit den mehr erzielten Toren kommt weiter.
3. Die Mannschaft mit den mehr erzielten Auswärtstoren kommt weiter.
4. Ist noch immer nicht über das Weiterkommen entschieden, werden die Regeln 1., 2. und 3. nach der Verlängerung noch einmal angewendet.
5. Ist noch immer nicht über das Weiterkommen entschieden, kommt der Sieger des Elfmeterschießens weiter.

Entscheiden Sie bei jeder der folgenden Bedingungen ob diese notwendig oder hinreichend für das Weiterkommen von Mannschaft A ist, und geben Sie ein Gegenbeispiel an, wenn sie dies nicht ist.

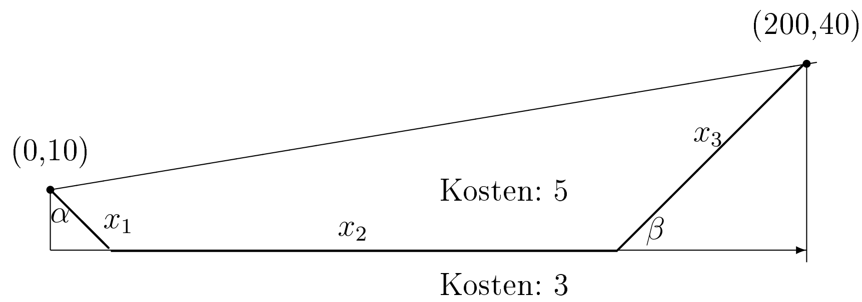
a) Mannschaft A hat ein Tor erzielt.
b) Mannschaft A hat eines der Spiele gewonnen.
c) Mannschaft A hat mehr Tore erzielt als der Gegner.
d) Mannschaft A spielt in der Verlängerung auswärts unentschieden, und diese war nicht torlos.
e) Mannschaft A hat keines der Spiele verloren.

Lösungen

1) Bleibt das Flugzeug immer im Bereich $x > 0$ so ist der günstigste Fug die gerade Verbindung zum Ziel. Dies kostet

$$5\sqrt{200^2 + 30^2} \approx 1011.$$

Will man die Landeszone wechseln, so ist der kürzeste Weg der Flug in einem Winkel $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ zur y-Achse bis zum Erreichen der x-Achse, dann eine Strecke entlang der x-Achse und schließlich im Winkel $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ zur x-Achse direkt auf das Ziel zu, siehe Skizze.



Wählt man $\alpha = \frac{\pi}{2}$ oder $\beta = 0$ so ergeben sich keine zwei Wechsel der Landeszonen. Für alle übrigen Winkel sind die entsprechenden Streckenlängen:

$$x_1 = \frac{10}{\cos(\alpha)}, \quad x_2 = 200 - 10\tan(\alpha) - \frac{40}{\tan(\beta)}, \quad x_3 = \frac{40}{\sin(\beta)}.$$

Die zu minimierenden Gesamtkosten sind nun

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 600 - 30\tan(\alpha) + \frac{50}{\cos(\alpha)} + \frac{200}{\sin(\beta)} - \frac{120}{\tan(\beta)} \\ &= 600 + 10\frac{5 - 3\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + 40\frac{5 - 3\cos(\beta)}{\sin(\beta)} \end{aligned}$$

Nullsetzen der Ableitungen nach α bzw. β ergibt

$$0 = \frac{-3\cos^2(\alpha) + (5 - 3\sin(\alpha))\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{-3 + 5\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\alpha) = \frac{3}{5},$$

$$0 = \frac{-3\sin^2(\beta) + (5 - 3\cos(\beta))\cos(\beta)}{\sin^2(\beta)} = \frac{-3 + 5\cos(\beta)}{\sin^2(\beta)} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\beta) = \frac{3}{5}.$$

Hieraus erhalten wir weiter

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}, \quad \sin(\beta) = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Damit ergeben sich die Gesamtkosten

$$600 + 10\frac{5 - 3\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} + 40\frac{5 - 3\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = 600 + 40 + 160 = 800.$$

Da das globale Minimum entweder in einem stationären Punkt im Inneren oder am Rand liegen muss, berechnen wir die Flugkosten für die Ränder: Für $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ oder $\beta \to 0$ erreichen wir keinen Landeszonenwechsel, oder erreichen das Ziel nicht. Für $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$ ergeben sich die Kosten

$$5 \cdot 10 + 200 \cdot 3 + 40 \cdot 10 = 1050 > 800.$$

Damit ist die kostengünstigste Flugroute in einem Winkel $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ zur y-Achse bis zum Erreichen der x-Achse zu fliegen, dann

$$x_2 = 200 - 10\tan(\alpha) - \frac{40}{\tan(\beta)} = 200 - 10\frac{3}{4} - \frac{40 \cdot 3}{4} = 162.5$$

Längeneinheiten entlang der x-Achse zu fliegen, und schließlich im Winkel $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ direkt Richtung Ziel zu fliegen.

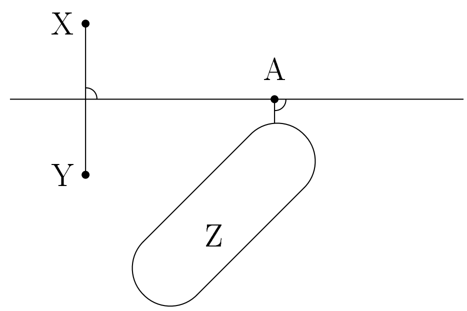
2) Da die Lenkwinkel beider Flugzeuge beliebig steuerbar sind, kann man eine einfache Dynamik der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \cos(\psi(t)) \\ \sin(\psi(t)) \end{pmatrix}$$

annehmen, wobei der Lenkwinkel ϕ nun die Optimierungsvariable von X und der Lenkwinkel ψ die von Y ist. Sei T die Zeit nach der X von Y abgefangen wird, wobei wir vereinfachend annehmen, dass X wartet, falls das Gebiet Z vorher erreicht ist. Das Problem von Y besteht darin das Gebiet Z zu schützen, was wir dahingehend interpretieren, dass der Abstand von X zum Gebiet maximiert werden soll zu dem Zeitpunkt, wo Y den Flieger X eingeholt hat. Wir erhalten dann die beiden gekoppelten Optimierungsprobleme

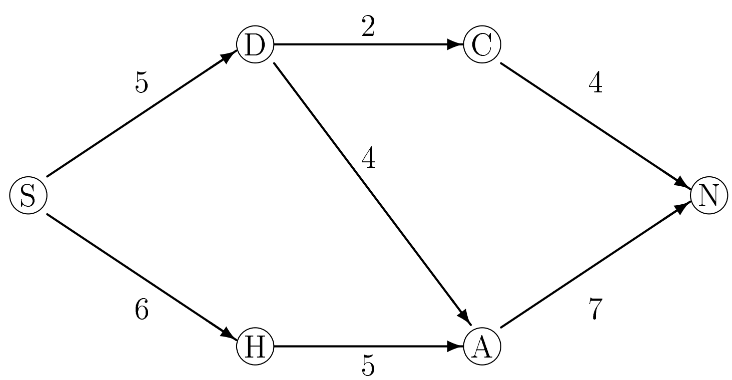
$$\min_{\phi} \min_{z \in Z} \|x(T) - z\|^2 \quad \text{u.d.N.} \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \end{pmatrix}, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = y(T)$$
$$\max_{\psi} \min_{z \in Z} \|y(T) - z\|^2 \quad \text{u.d.N.} \quad \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \cos(\psi(t)) \\ \sin(\psi(t)) \end{pmatrix}, \quad y(0) = y_0, \quad x(T) = y(T).$$

Hierbei handelt es sich um ein Differentialspiel. Da beide Flugzeuge gleich schnell fliegen, teilt die Mittelsenkrechte auf der Strecke $[x_0, y_0]$ den $\mathbb{R}^2$ in zwei Halbräume. In dem einen, wo X startet, kann X jeden Punkt schneller erreichen als Y, in dem anderen ist umgekehrt Y schneller an jedem Punkt als X. Damit kann die optimale Strategie für X nur sein denjenigen Punkt A in seinem Halbraum anzufliegen, der der Menge Z am nächsten gelegen ist. Für Y ist es ebenfalls die optimale Strategie diesen Punkt anzufliegen, um X möglichst weit von Z entfernt abzufangen. Schneidet die Mittelsenkrechte die Menge Z, so kann Y das Gebiet nicht schützen.



Weicht X von seiner Optimalstrategie zum Zeitpunkt t_1 ab, so kann Y den Punkt A schneller erreichen, und folglich eine größere Distanz von X zum Zielgebiet erzwingen. Hierzu muss Y seine Strategie anpassen und nun auf den am nächsten zu Z gelegenen Punkt auf der Mittelsenkrechte von $[x(t_1), y(t_1)]$ fliegen.

3) Das Transportproblem lässt sich wie folgt modellieren:



Die Anzahl der ankommenden und weiterfliegenden Passagiere in jedem Zwischenstopp muss gleich sein, und die Anzahl der in San Francisco abfliegenden Passagiere ist gleich der Anzahl der ankommenden Passagiere in New York. Daher muss gelten:

$$
\begin{aligned}
x_{SH} + x_{SD} - x_{AN} - x_{CN} &= 0,\\
x_{SH} - x_{HA} &= 0,\\
x_{SD} - x_{DA} - x_{DC} &= 0,\\
x_{HA} + x_{DA} - x_{AN} &= 0,\\
x_{DC} - x_{CN} &= 0.
\end{aligned}
$$

Ferner ist die Anzahl der fliegenden Passagiere in jedem Umsteigepunkt ganzzahlig, größer gleich Null, und kleiner gleich der Anzahl der freien Flugplätze:

$$\begin{aligned}
0 \leq \ & x_{SD} & \leq 5, \qquad & x_{SD} \in \mathbb{Z} \\
0 \leq \ & x_{SH} & \leq 6, \qquad & x_{SH} \in \mathbb{Z} \\
0 \leq \ & x_{DA} & \leq 4, \qquad & x_{DA} \in \mathbb{Z} \\
0 \leq \ & x_{DC} & \leq 2, \qquad & x_{DC} \in \mathbb{Z} \\
0 \leq \ & x_{HA} & \leq 5, \qquad & x_{HA} \in \mathbb{Z} \\
0 \leq \ & x_{AN} & \leq 7, \qquad & x_{AN} \in \mathbb{Z} \\
0 \leq \ & x_{CN} & \leq 4, \qquad & x_{CN} \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Wir maximieren die Anzahl der in San Francisco abfliegenden Passagiere:

$$\max x_{SH} + x_{SD}.$$

Damit erhält man ein ganzzahliges lineares Optimierungsproblem

Betrachtet man Chicago, so folgt $x_{DC} = x_{CN} \leq 2$. Nun kann man ausgehend von der noch maximal möglichen Anzahl in New York ankommender Passagiere $x_{AN} + x_{CN} = 7 + 2 = 9$ beginnend einen zulässigen Flugplan bestimmen (dieser ist nicht eindeutig):

$$x_{CN} = 2, x_{DC} = 2, x_{AN} = 7, x_{HA} = 5, x_{DA} = 2, x_{SD} = 4, x_{SH} = 5.$$

Insgesamt können 9 Passagiere umgebucht werden.

4) a) Ohne ein Tor kann man in keiner der Regeln 1. - 5. ein „mehr“ als der Gegner haben. Daher ist die Bedingung notwendig. Sie ist nicht hinreichend, z.B. Heimspiel 1:1, Auswärtsspiel 0:0.

   b) Es ist nicht notwendig ein Spiel zu gewinnen, z.B. Heimspiel 0:0, Auswärtsspiel 1:1. Es ist auch nicht hinreichend ein Spiel zu gewinnen, z.B. Heimspiel 1:0, Auswärtsspiel 0:2.

   c) Es ist nicht notwendig mehr Tore als der Gegner zu erzielen, z.B. Heimspiel 0:0, Auswärtsspiel 1:1. Es ist hinreichend mehr Tore zu erzielen als der Gegner, denn dann kann der Gegner nicht mehr Punkte erzielt haben als man selbst, und man kommt nach Regel 2. weiter.

   d) Eine nicht torlose, unentschieden Verlängerung auswärts bedeutet, dass man mehr Auswärtstore geschossen hat und dies reicht nach Regel 3. zum Weiterkommen. Es ist daher eine hinreichende Bedingung. Notwendig ist dies natürlich nicht, man kann auch die Verlängerung gewinnen.

   e) Keines der Spiele zu verlieren ist weder notwendig noch hinreichend, denn man kann mit zwei Unentschieden sowohl weiterkommen (Heimspiel 0:0, Auswärtsspiel 1:1) als auch ausscheiden (Heimspiel 1:1, Auswärtsspiel 0:0) .