Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. M. Gerdts, Dr. A. Dreves

der Bundeswehr
Universität München

Wintertrimester 2018

8. Übung in Optimierung

24) Betrachten Sie das konvexe Optimierungsproblem

$$\min f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m,$$
$$a_j^\top x = b_j \quad \forall j = 1, \ldots, p$$

mit konvexen und differenzierbaren Funktionen $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $a_j \in \mathbb{R}^n, b_j \in \mathbb{R}$ für alle $j = 1, \ldots, p$. Zeigen Sie, dass für jeden KKT-Punkt $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$ dieses Problems, $\bar{x}$ eine Lösung des Problems ist.

25) Betrachten Sie die Optimierungsprobleme

$$\min x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 \qquad \text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 - 1 = 0, \tag{1}$$
$$\min x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{\eta}{2}(x_1 + x_2 - 1)^2 \quad \text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 - 1 = 0. \tag{2}$$

(a) Berechnen Sie den KKT-Punkt $(\bar{x}, \bar{\mu})$ des Problems (1).

(b) Zeigen Sie, dass für alle $\eta > 2$ der in (a) berechnete KKT-Punkt globales unrestringiertes Minimum der Lagrangefunktion

$$L_a(\cdot, \bar{\mu}, \eta) := x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{\eta}{2}(x_1 + x_2 - 1)^2 + \bar{\mu}(x_1 + x_2 - 1)$$

des Problems (2) ist, wobei der Multiplikator $\bar{\mu}$ fix ist.

(c) Teil (b) motiviert ein allgemeines iteratives Verfahren zur Lösung eines gleichungsrestringierten Problems durch Lösung unrestringierter Probleme. Überlegen Sie sich durch Vergleich der Optimalitätsbedingungen der beiden Probleme, wie eine geeigneter Approximation des unbekannten Multiplikators aussehen könnte.

26) Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\min \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2)^2 + x_1 \quad \text{u.d.N.} \quad 1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0.$$

(a) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen dieses Problems als Gleichungssystem in der Form $H(x, \lambda) = 0$. Verwenden Sie dazu die Minimumsfunktion um die Komplementaritätsbedingungen in eine Gleichung zu verwandeln.

(b) Zeigen Sie, dass der Lagrange-Multiplikator in einem KKT-Punkt nicht Null sein kann. Zeigen Sie damit, dass die Funktion H in einem KKT-Punkte differenzierbar und die Jacobimatrix regulär ist.

(c) Was kann man über die Konvergenz des lokalen Newton-Verfahrens angewandt auf das Gleichungssystem $H(x, \lambda) = 0$ sagen?