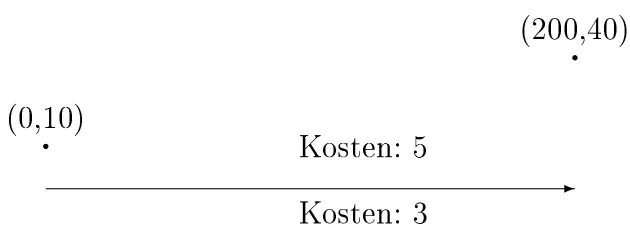
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. M. Gerdts, Dr. A. Dreves

Universität der Bundeswehr München

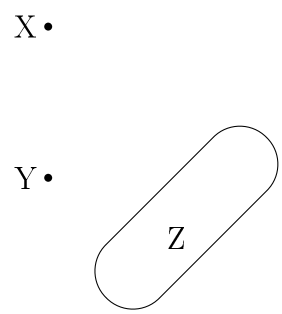
Wintertrimester 2018

1. Übung Optimierung

1) Ein Flugzeug mit beliebig steuerbarem Lenkwinkel befindet sich beim Start im Punkt $(0, 10)$ und möchte nach $(200, 40)$ fliegen. Die x-Achse sei dabei eine Landesgrenze an der sich die Überflugkosten ändern, und zwar sind diese 5 Geld- pro Längeneinheiten im Bereich $x > 0$ und 3 für $x \leq 0$. Finden Sie die kostengünstigste Flugroute.



Aufgabe 1



Aufgabe 2

2) Zwei Flugzeuge X und Y befinden sich in den Startpositionen $x(0) = x_0$ bzw. $y(0) = y_0$. Beide sollen mit der gleichen Geschwindigkeit v fliegen, und der Lenkwinkel soll beliebig steuerbar sein. Das Flugzeug X versucht seinen Abstand zu einem Zielgebiet Z zu minimieren, bevor es von Y abgefangen wird. Das Flugzeug Y versucht das Gebiet Z zu schützen, indem es den Abstand von X zum Zielgebiet maximiert. Dabei nehmen wir an, dass Flugzeug X nicht mehr weiter fliegen kann, sobald es von Y abgefangen ist, d.h. den Abstand Null hat. Überlegen Sie sich wie eine einfache Dynamik der Flugzeuge aussehen könnte, formulieren Sie die Ziele als Optimierungsprobleme, und überlegen Sie sich geometrisch, wie die jeweils optimalen Flugrouten aussehen.

3) Auf der 15 Meter breiten Autobahn kommt einem Auto A ein Geisterfahrer G entgegen, der versucht mit dem Auto A zusammenzustoßen. Ausgehend von einer Anfangskonfiguration $z_A(0) = z_A^0$ und $z_G(0) = z_G^0$ lässt sich der Zustand $z_A = (x_A, y_A, v_A, \Psi_A)$ ((x, y) Position, Geschwindigkeit v und Lenkwinkel Ψ) des Autos A mittels der Steuerungsvariablen u_A (Beschleunigung, Lenkung) über die Fahrzeugdynamik

$$z_A'(t) = f_A(z_A(t), u_A(t))$$

beschreiben. Ebenso wird der Zustand z_G des Autos G mittels u_G über

$$z_G'(t) = f_G(z_G(t), u_G(t))$$

gesteuert. Formulieren Sie das Problem des Autos A zum Zeitpunkt T, wenn beide Autos auf gleicher Höhe sind, einen maximalen Abstand von G zu haben als Optimierungsproblem. Formulieren Sie ebenfalls das Problem von G zum Zeitpunkt T einen minimalen Abstand von A zu haben.

Zur Vereinfachung nehmen wir nun an, beide Autos würden zu Beginn genau in der Mitte der Straße geradeaus aufeinander zu fahren. Überlegen Sie, ob es dann ein Paar von Steuerungen (u_A, u_G) geben kann, welches gleichzeitig beide Optimierungsprobleme löst.

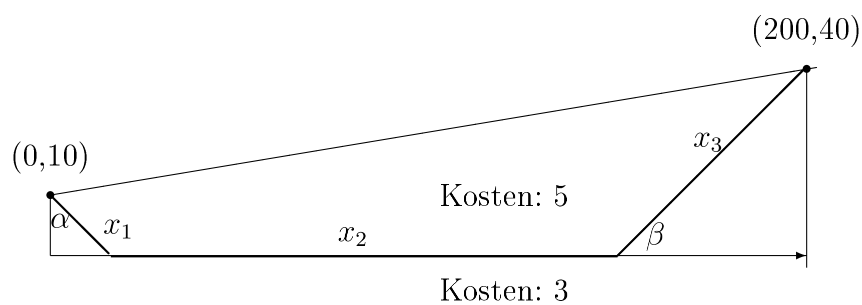
4) Nach einem Flugausfall von San-Francisco nach New York sollen möglichst viele der Passagiere auf Ausweichflüge mit Umsteigen (und jeweils gesicherten Anschlussflügen) umgebucht werden. Dabei stehen die in der Tabelle angegebenen Sitzplätze zur Verfügung. Formulieren Sie ein Optimierungsproblem zur Bestimmung der maximal möglichen Anzahl von Passagieren, die über diese Flüge von San-Francisco nach New York gelangen können und versuchen Sie es zu lösen.

von	nach	freie Plätze
San Francisco	Denver	5
San Francisco	Houston	6
Denver	Atlanta	4
Denver	Chicago	2
Houston	Atlanta	5
Atlanta	New York	7
Chicago	New York	4

Lösungen

1) Bleibt das Flugzeug immer im Bereich $x > 0$ so ist der günstigste Fug die gerade Verbindung zum Ziel. Dies kostet
$$5\sqrt{200^2 + 30^2} \approx 1011.$$

Will man die Landeszone wechseln, so ist der kürzeste Weg der Flug in einem Winkel $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ zur y-Achse bis zum Erreichen der x-Achse, dann eine Strecke entlang der x-Achse und schließlich im Winkel $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ zur x-Achse direkt auf das Ziel zu, siehe Skizze.



Wählt man $\alpha = 0$ oder $\beta = \frac{\pi}{2}$ so ergeben sich keine zwei Wechsel der Landeszonen. Für alle übrigen Winkel sind die entsprechenden Streckenlängen:

$$x_1 = \frac{10}{\cos(\alpha)}, \quad x_2 = 200 - 10\tan(\alpha) - \frac{40}{\tan(\beta)}, \quad x_3 = \frac{40}{\sin(\beta)}.$$

Die zu minimierenden Gesamtkosten sind nun

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 600 - 30\tan(\alpha) + \frac{50}{\cos(\alpha)} + \frac{200}{\sin(\beta)} - \frac{120}{\tan(\beta)} \\ &= 600 + 10\frac{5 - 3\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + 40\frac{5 - 3\cos(\beta)}{\sin(\beta)} \end{aligned}$$

Nullsetzen der Ableitungen nach α bzw. β ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{-3\cos^2(\alpha) + (5 - 3\sin(\alpha))\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{-3 + 5\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\alpha) = \frac{3}{5}, \\ 0 &= \frac{-3\sin^2(\beta) + (5 - 3\cos(\beta))\cos(\beta)}{\sin^2(\beta)} = \frac{-3 + 5\cos(\beta)}{\sin^2(\beta)} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\beta) = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir weiter

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}, \quad \sin(\beta) = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Damit ergeben sich die Gesamtkosten

$$600 + 10\frac{5 - 3\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} + 40\frac{5 - 3\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = 600 + 40 + 160 = 800.$$

Die kostengünstigste Flugroute ist also in einem Winkel $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ zur y-Achse bis zum Erreichen der x-Achse zu fliegen, dann

$$x_2 = 200 - 10\tan(\alpha) - \frac{40}{\tan(\beta)} = 200 - 10\frac{3}{4} - \frac{40 \cdot 3}{4} = 162.5$$

Längeneinheiten entlang der x-Achse zu fliegen und schließlich im Winkel $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ direkt Richtung Ziel zu fliegen.

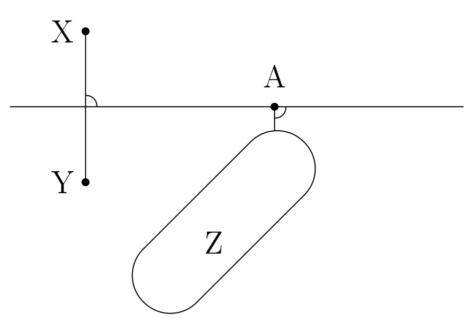
2) Da die Lenkwinkel beider Flugzeuge beliebig steuerbar sind, kann man eine einfache Dynamik der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \cos(\psi(t)) \\ \sin(\psi(t)) \end{pmatrix}$$

annehmen, wobei der Lenkwinkel ϕ nun die Optimierungsvariable von X und der Lenkwinkel ψ die von Y ist. Sei T die Zeit nach der Y X abgefangen hat, wobei wir vereinfachend annehmen, dass X wartet, falls das Gebiet Z vorher erreicht ist. Das Problem von Y besteht darin das Gebiet Z zu schützen, was wir dahingehend interpretieren, dass der Abstand von X zum Gebiet maximiert werden soll zu dem Zeitpunkt, wo Y den Flieger X eingeholt hat. Wir erhalten dann die beiden gekoppelten Optimierungsprobleme

$$\min_{\phi} \min_{z \in Z} \|x(T) - z\|^2 \quad \text{u.d.N.} \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \end{pmatrix}, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = y(T)$$
$$\max_{\psi} \min_{z \in Z} \|x(T) - z\|^2 \quad \text{u.d.N.} \quad \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \cos(\psi(t)) \\ \sin(\psi(t)) \end{pmatrix}, \quad y(0) = y_0, \quad x(T) = y(T).$$

Hierbei handelt es sich um ein Differentialspiel. Da beide Flugzeuge gleich schnell fliegen, teilt die Mittelsenkrechte auf der Strecke $[x_0, y_0]$ den $\mathbb{R}^2$ in zwei Halbräume. In dem einen, wo X startet, kann X jeden Punkt schneller erreichen als Y, in dem anderen ist umgekehrt Y schneller an jedem Punkt als X. Damit kann die optimale Strategie für X nur sein denjenigen Punkt A in seinem Halbraum anzufliegen, der der Menge Z am nächsten gelegen ist. Für Y ist es ebenfalls die optimale Strategie diesen Punkt anzufliegen, um X möglichst weit von Z entfernt abzufangen. Schneidet die Mittelsenkrechte die Menge Z, so kann Y das Gebiet nicht schützen.



Weicht X von seiner Optimalstrategie zum Zeitpunkt t_1 ab, so kann Y den Punkt A schneller erreichen, und folglich eine größere Distanz von X zum Zielgebiet erzwingen. Hierzu muss Y seine Strategie anpassen und nun auf den am nächsten zu Z gelegenen Punkt auf der Mittelsenkrechte von $[x(t_1), y(t_1)]$ fliegen.

3) Zum Zeitpunkt T sind beide Autos auf gleicher Höhe, d.h. es gilt $y_A(T) = y_G(T)$. Der Abstand zwischen beiden Autos wird dann mittels $(x_A(T) - x_G(T))^2$ beschrieben. Wir erhalten also für den Autofahrer A das Problem

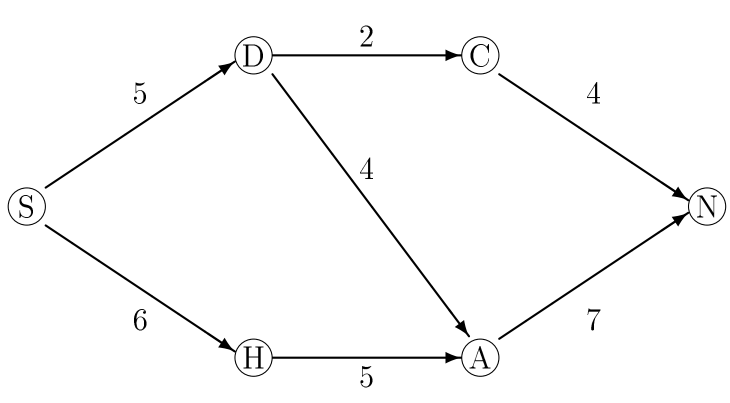
$$\max_{u_A} \frac{1}{2}(x_A(T) - x_G(T))^2 \quad \text{u.d.N.} \quad \begin{aligned} &z_A'(t) = f_A(z_A(t), u_A(t)),\ z_A(0) = z_A^0 \\ &z_G'(t) = f_G(z_G(t), u_G(t)),\ z_G(0) = z_G^0 \\ &0 \le x_A(t) \le 15, 0 \le x_G(t) \le 15 \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir für G

$$\min_{u_G} \frac{1}{2}(x_A(T) - x_G(T))^2 \quad \text{u.d.N.} \quad \begin{aligned} &z_A'(t) = f_A(z_A(t), u_A(t)),\ z_A(0) = z_A^0 \\ &z_G'(t) = f_G(z_G(t), u_G(t)),\ z_G(0) = z_G^0 \\ &0 \le x_A(t) \le 15, 0 \le x_G(t) \le 15 \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Angenommen, $(\bar{u}_A, \bar{u}_G)$ wäre ein Paar von Steuerungen, so dass beide Probleme gleichzeitig gelöst werden. Ist dann $x_A(T)$ auf der selben Straßenhälfte wie $x_G(T)$ so könnte A durch anwenden von $-\bar{u}_A$ einen größeren Abstand erzielen, also löst $\bar{u}_A$ das Problem von A nicht. Sind hingegen $x_A(T)$ und $x_G(T)$ auf verschiedenen Straßenhälften, so könnte G durch Anwenden von $-\bar{u}_G$ den Abstand verringern, also löst $\bar{u}_G$ das Problem von G nicht. Ist $x_G(T) = x_A(T)$ genau die Mitte der Straße, so könnte A durch Anwenden einer Ausweichstrategie die Distanz vergrößern, und $\bar{u}_A$ löst das Problem von A nicht. Es kann also kein Paar von Steuerungen geben, so dass beide Probleme gleichzeitig gelöst werden.

4) Das Transportproblem lässt sich wie folgt modellieren:



Die Anzahl der ankommenden und weiterfliegenden Passagiere in jedem Zwischenstopp muss gleich sein, und die Anzahl der in San Francisco abfliegenden Passagiere ist gleich der Anzahl der ankommenden Passagiere in New York. Daher muss gelten:

$$\begin{aligned} x_{SH} + x_{SD} - x_{AN} - x_{CN} &= 0, \\ x_{SH} - x_{HA} &= 0, \\ x_{SD} - x_{DA} - x_{DC} &= 0, \\ x_{HA} + x_{DA} - x_{AN} &= 0, \\ x_{DC} - x_{CN} &= 0. \end{aligned}$$

Ferner ist die Anzahl der fliegenden Passagiere in jedem Umsteigepunkt ganzzahlig, größer gleich Null, und kleiner gleich der Anzahl der freien Flugplätze:

$$\begin{array}{lll} 0 \leq & x_{SD} & \leq 5, \qquad x_{SD} \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq & x_{SH} & \leq 6, \qquad x_{SH} \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq & x_{DA} & \leq 4, \qquad x_{DA} \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq & x_{DC} & \leq 2, \qquad x_{DC} \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq & x_{HA} & \leq 5, \qquad x_{HA} \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq & x_{AN} & \leq 7, \qquad x_{AN} \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq & x_{CN} & \leq 4, \qquad x_{CN} \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Wir maximieren die Anzahl der in San Francisco abfliegenden Passagiere:

$$\max x_{SH} + x_{SD}.$$

Damit erhält man ein ganzzahliges lineares Optimierungsproblem

Betrachtet man Chicago, so folgt $x_{DC} = x_{CN} \leq 2$. Nun kann man ausgehend von der noch maximal möglichen Anzahl in New York ankommender Passagiere $x_{AN} + x_{CN} = 7 + 2 = 9$ beginnend einen zulässigen Flugplan bestimmen (dieser ist nicht eindeutig):

$$x_{CN} = 2, x_{DC} = 2, x_{AN} = 7, x_{HA} = 5, x_{DA} = 2, x_{SD} = 4, x_{SH} = 5.$$

Insgesamt können 9 Passagiere umgebucht werden.