Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Angewandte Mathematik
und Wissenschaftliches Rechnen
Dr. habil. S.-J. Kimmerle, A. Britzelmeier

Wintertrimester 2020

Mathematische Methoden in den Ingenieurwissenschaften

Übung 5

Aufgabe 1) (Finite-Elemente-Methode)

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(t) &= f(t), \quad t \in (a,b), \\ u(a) = u(b) &= 0. \end{aligned}$$

Die Idee der Finite-Elemente-Methode besteht darin, das Randwertproblem in ein Variationsproblem zu überführen. Dazu wird die Differentialgleichung mit einer Funktion v aus einem geeigneten Funktionenraum mit $v(a) = v(b) = 0$ multipliziert und integriert:

$$-\int_a^b u''(t)v(t)\,dt = \int_a^b f(t)v(t)\,dt.$$

Partielle Integration des linken Integrals führt auf die Variationsgleichung

$$\int_a^b u'(t)v'(t)\,dt = \int_a^b f(t)v(t)\,dt, \tag{1}$$

die für alle (geeigneten) Funktionen v mit $v(a) = v(b) = 0$ erfüllt sein muss.

Zur numerischen Approximation dieser Gleichung wird das Intervall $[a,b]$ äquidistant mittels $t_i = a + ih$, $i = 0,\ldots,N$, $h = (b-a)/N$ unterteilt. Unter Verwendung stückweise linearer Basisfunktionen $\psi_i, i = 0,\ldots,N$ des Splineraums $S_N([a,b],\mathbb{R})$ hat die gesuchte approximative Lösung die Form

$$u_N(t) = \sum_{i=0}^{N} c_i\psi_i(t).$$

Vorüberlegung zu den Randwerten:

$$u_N(a) = c_0\psi_0(a) = c_0 = 0$$

$$u_N(b) = c_N\psi_N(b) = c_N = 0$$

Daher genügt für die vorliegenden Randwerte lediglich die Betrachtung der Summe

$$u_N(t) = \sum_{i=1}^{N-1} c_i \psi_i(t).$$

Wählt man nun als Testfunktionen die $N-1$ Basisfunktionen $v_i(t) = \psi_i(t)$, erhält man aus (1) folgende Gleichungen:

$$\int_a^b u_N'(t)\psi_i'(t)\,dt = \int_a^b f(t)\psi_i(t)\,dt, \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{2}$$

Formulieren Sie das aus (2) resultierende lineare Gleichungssystem und lösen Sie es für den Spezialfall $N = 10$, $f(t) = 1$ und $[a, b] = [0, 1]$.

Aufgabe 2) (Optimalsteuerungsproblem)
Gesucht ist eine stetige Steuerung $u : [0, 2] \to \mathbb{R}$ und ein stetig differenzierbarer Zustand $x : [0, 2] \to \mathbb{R}$, so dass

$$-x(2) + \int_0^2 \frac{1}{2}(x(t) - 4)^2 + \frac{1}{6}u^2(t)\,dt$$

minimal wird unter der Nebenbedingung

$$x'(t) = x(t) + u(t), \qquad x(0) = 0.$$

Berechnen Sie eine den notwendigen Optimalitätsbedingungen genügende Lösung.

Aufgabe 3) (Optimalsteuerungsproblem)
Gesucht ist eine stetige Steuerung $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ und ein zweimal stetig differenzierbarer Zustand $x : [0, T] \to \mathbb{R}$, so dass

$$-x(T) + \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)\,dt$$

minimal wird unter der Nebenbedingung

$$x''(t) = u(t), \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 0.$$

Berechnen Sie eine den notwendigen Optimalitätsbedingungen genügende Lösung.

Besprechung der Aufgaben Mo, 03.02.2020 bzw. Do, 06.02.2020 in der jeweiligen Übung.