Lineare DGLn 1. Ordnung $y' = p(x)y + q(x)$

•Homogene lineare DGL $\boxed{y' = p(x)y}$

$$\text{Allgemeine Lösung } \boxed{\boxed{y(x) = Ce^{P(x)}, \quad C \in \mathbb{R},}}$$

wobei $P(x) = \int p(x)dx$ irgendeine feste Stammfunktion von $p(x)$ ist.
Die Menge aller Lösungen bildet einen Vektorraum über $\mathbb{R}$; d.h. es gelten:

a) $y \equiv 0$ ist eine Lösung.
b) $y = y(x)$ Lösung und $\lambda \in \mathbb{R}$ bel. $\Longrightarrow \bar{y}(x) = \lambda y(x)$ Lösung.
c) Sind $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$ Lösungen $\Longrightarrow y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ Lösung

---

•Inhomogene lineare DGL $\boxed{y' = p(x)y + q(x)}$
Allgemeine Lösung:
spezielle (partikuläre) Lösung $y_0(x)$ + allg. Lösung der zugeh. homogenen DGL $y_h(x)$

$$\boxed{\boxed{y(x) = y_0(x) + y_h(x) = y_0(x) + Ce^{P(x)}, C \in \mathbb{R},}}$$

wobei $P(x)$ eine feste Stammfunktion von $p(x)$ ist.
a) Sind $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$ zwei Lösungen $\Longrightarrow y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ Lösung.
b) Sind $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$ zwei Lösungen $\Longrightarrow y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ wieder eine Lösung.
Bestimmung einer partikulären Lösung mittels **Methode der Variation der Konstanten:**
A. Lösen von $y_h' = p(x)y_h: \quad y_h = Ce^{P(x)}, \quad P(x)$ Stammfunktion von $p(x)$.
B. Variation der Konstanten C aus A: $\boxed{y_0(x) = C(x)e^{P(x)}}$ mit einer Fkt. $C(x)$ von x .
C. Einsetzen von $y_0(x) = C(x)e^{P(x)}$ in die DGL: $(C(x)e^{P(x)})' = p(x)(C(x)e^{P(x)}) + q(x)$
$\Longrightarrow C'(x) = q(x)e^{-P(x)} \Longrightarrow C(x) = \int q(x)e^{-P(x)}dx$
$\Longrightarrow$ partikuläre Lösung: $y_0(x) = C(x)e^{P(x)} = e^{P(x)} \int q(x)e^{-P(x)}dx$

- **DGLn, welche sich auf lineare DGLn zurückführen lassen**
  - **Bernoullische DGL** $\boxed{y' = p(x) \cdot y + q(x)y^\alpha}$
    mit gegebenen Funktionen p, q einer Variablen x und $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1$.
    Substitution $z = y^{1-\alpha} \to$ lineare DGL $z' = (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q(x)$
  - **Riccatische DGL** $\boxed{y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)}$
    mit gegebenen Funktionen p, q, r einer Variablen x .
    Spezielle Lösung $y_0 = y_0(x)$ ist bekannt!!! Substitution $u(x) := y(x) - y_0(x)$
    $\to$ Bernoullische DGL $u' = (2y_0(x)p(x) + q(x))u + p(x)u^2 \to$ lineare DGL