DGLn 1. Ordnung $y' = f(x,y)$

Separierbare DGLn: $\boxed{y' = g(x) \cdot h(y)}$ Trennung der Variablen!

Allg. Lösungen: durch Integration $\displaystyle\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$ (dann auflösen nach y, falls möglich)

Spez. Lösungen: $y = const.$ mit $h(y) = 0$

DGLn, welche sich auf separierbare DGLn zurückführen lassen.

- DGLn der Form $\boxed{y' = \phi(x+y)}$

  Substitution: $u(x) := x + y(x) \to u' = 1 + \phi(u)$ Lösungen: $\displaystyle\int \frac{1}{1+\phi(u)} du = x + c$

- **Homogene DGLn** $\boxed{y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)}$

  Substitution: $u(x) := \dfrac{y(x)}{x} \to u' = \dfrac{\phi(u) - u}{x}$ Lösungen: $\displaystyle\int \frac{1}{\phi(u) - u} du = \ln|x| + c$

- DGLn der Form $\boxed{y' = \frac{y}{x} + f(x) \cdot g\left(\frac{y}{x}\right)}$

  Substitution: $u(x) := \dfrac{y(x)}{x} \to u' = \dfrac{f(x)}{x} \cdot g(u)$ Lösungen: $\displaystyle\int \frac{1}{g(u)} du = \int \frac{f(x)}{x} dx$

- **Jacobische DGL** $\boxed{y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)}$

  mit reellen Konstanten $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ und $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$. Es sei $D := a\beta - b\alpha$.

  Fall 1 $(c,\gamma) = (0,0) : y' = f\left(\dfrac{a + b\frac{y}{x}}{\alpha + \beta\frac{y}{x}}\right) = \phi\left(\dfrac{y}{x}\right) \to$ homogene DGL $\to$ sep. DGL

  Fall 2 $(c,\gamma) \neq (0,0)$ und $D \neq 0$: Transformation $(x,y) \to (u,v)$:

  $$\left.\begin{aligned} au + bv &:= ax + by + c \\ \alpha u + \beta v &:= \alpha x + \beta y + \gamma \end{aligned}\right\} \to u = x + \frac{c\beta - \gamma b}{D}, v = y + \frac{a\gamma - \alpha c}{D}$$

  führt auf die homogene DGL $\displaystyle\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a + b\frac{v}{u}}{\alpha + \beta\frac{v}{u}}\right) = \phi\left(\frac{v}{u}\right) \to$ sep. DGL

  Fall 3 $(c,\gamma) \neq (0,0), D = 0$ und $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$:

  Wegen $D = 0$ und $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ gibt es ein $\rho \in \mathbb{R}$ mit $a = \rho\alpha, b = \rho\beta$.

  Für $\beta \neq 0$: Substitution $u(x) := \alpha x + \beta y(x) \to$ sep. DGL $u' = \alpha + \beta f\left(\dfrac{\rho u + c}{u + \gamma}\right)$.

  Lösungen: $\displaystyle\int \frac{1}{\alpha + \beta f\left(\frac{\rho u + c}{u+\gamma}\right)} du = x + c_1$

  Fall 4 $(\alpha,\beta) = (0,0)$: Für $b \neq 0$ Substitution $u(x) := \dfrac{ax + by(x) + c}{\gamma}$

  $\to$ sep. DGL $u' = \dfrac{1}{\gamma}(a + bf(u))$ Lösungen: $\gamma \displaystyle\int \frac{1}{a + bf(u)} du = x + c_1$