Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für angewandte Mathematik
und wissenschaftliches Rechnen
Prof. Dr. Matthias Gerdts, Dr. A. Dreves

Wintertrimester 2021

Mathematische Methoden in den Ingenieurwissenschaften
5. Übung

13) **Differenzenverfahren**

Gegen Sei die Randwertaufgabe

$$x''(t) = 4x(t), \quad x(a) = x_a,\ x(b) = x_b.$$

a) Formulieren Sie das aus dem Differenzenverfahren resultierende lineare Gleichungssystem für eine Diskretisierung in N Intervalle.

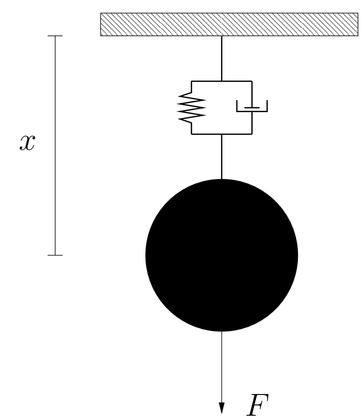
b) Geben Sie das Gleichungssystem für $N = 2,\ x(0) = 1,\ x(1) = 2$ explizit an.

14) **Lösbarkeit eines Randwertproblems**

Eine von außen durch $F(t)$ angeregte, gedämpfte Schwingung genügt unter der Voraussetzung, dass die rückstellende Federkraft proportional zur Auslenkung $x(t)$ und die Dämpfung proportional zur Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ ist, der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + cx(t) = F(t),$$

wobei $c > 0$ die Federkonstante, $d > 0$ die Dämpfungskonstante und $m > 0$ die Masse des Schwingers bezeichnen, vgl. Abbildung. Zusätzlich seien Randwerte $x(0) = x_0$ und $x(b) = x_b$ gegeben.



Diskutieren Sie die Lösbarkeit der Randwertaufgabe für $m = d = c = 1$ und $F(t) \equiv 0$ in Abhängigkeit von b, x_0, x_b.

15) **Finite-Element-Methode**

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(t) &= f(t), \quad t \in (a,b), \\ u(a) = u(b) &= 0. \end{aligned}$$

Die Idee der Finite-Element-Methode besteht darin, das Randwertproblem in ein Variationsproblem zu überführen. Dazu wird die Differentialgleichung mit einer Funktion v aus einem geeigneten Funktionenraum mit $v(a) = v(b) = 0$ multipliziert und integriert:

$$-\int_a^b u''(t)v(t)\,dt = \int_a^b f(t)v(t)\,dt.$$

Partielle Integration des linken Integrals führt auf die Variationsgleichung

$$\int_a^b u'(t)v'(t)\,dt = \int_a^b f(t)v(t)\,dt, \tag{1}$$

die für alle (geeigneten) Funktionen v mit $v(a) = v(b) = 0$ erfüllt sein muss.

Zur numerischen Approximation dieser Gleichung wird das Intervall $[a,b]$ äquidistant mittels $t_i = a + ih$, $i = 0,\ldots,N$, $h = (b-a)/N$ unterteilt. Unter Verwendung stückweise lineare Basisfunktionen $\psi_i, i = 0,\ldots,N$ des Splineraums $S_N([a,b],\mathbb{R})$ hat die gesuchte approximative Lösung die Form

$$u_N(t) = \sum_{i=0}^{N} c_i\psi_i(t).$$

Vorüberlegung zu den Randwerten:

$$\begin{aligned} u_N(a) = c_0\psi_0(a) = c_0 = 0 \\ u_N(b) = c_N\psi_N(b) = c_N = 0 \end{aligned}$$

Daher genügt für die vorliegenden Randwerte lediglich die Betrachtung der Summe

$$u_N(t) = \sum_{i=1}^{N-1} c_i\psi_i(t).$$

Wählt man nun als Testfunktionen die $N-1$ Basisfunktionen $v_i(t) = \psi_i(t)$ erhält man aus (1) folgende Gleichungen:

$$\int_a^b u_N'(t)\psi_i'(t)\,dt = \int_a^b f(t)\psi_i(t)\,dt, \quad i = 1,\ldots,N-1. \tag{2}$$

Formulieren Sie das aus (2) resultierende lineare Gleichungssystem und lösen Sie es für den Spezialfall $N = 10$, $f(t) = 1$ und $[a,b] = [0,1]$.