Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. M. Gerdts, A. Huber, A. Britzelmeier

Wintertrimester 2019

Mathematische Methoden in den Ingenieurwissenschaften

Übung 8

Aufgabe 1) (Laplace-Transformation)

Bestimmen Sie mithilfe der Definitionsgleichung der Laplace-Transformation die Bildfunktion der folgenden Funktionen:

a) $f(t) = 2te^{-4t}$ b) $f(t) = e^{-\delta t}\sin(\omega t)$

Hinweise:

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1), \qquad \int e^{ax}\ \sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin(bx) - b\cos(bx)\right).$$

Lösung:

Die Bildfunktion einer Funktion $f(t)$ ist durch die Laplace-Transformation

$$F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt$$

definiert.

a) Für die Funktion

$$f(t) = 2te^{-4t}$$

gilt:

$$F(s) = \int_0^\infty 2te^{-4t}e^{-st}dt = 2\int_0^\infty te^{-(s+4)t}dt.$$

Unter Anwendung des ersten Hinweis erhalten wir

$$F(s) = 2 \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-(s+4)t}}{(s+4)^2}(-(s+4)t-1) \Bigg|_0^b \right]$$
$$= 2\left(\underbrace{-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{be^{-(s+4)b}}{s+4} + \frac{e^{-(s+4)b}}{(s+4)^2}\right)}_{=0} + 0 + \frac{e^0}{(s+4)^2} \right) = \frac{2}{(s+4)^2}.$$

b) Für die Funktion

$$f(t) = e^{-\delta t}\sin(\omega t)$$

gilt:

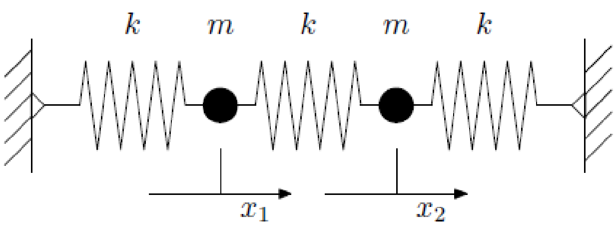
$$F(s) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\sin(\omega t)\, e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(s+\delta)t}\sin(\omega t)\, dt.$$

Unter Anwendung des zweiten Hinweis erhalten wir

$$F(s) = \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-(s+\delta)t}}{(s+\delta)^2+\omega^2}(-(s+\delta)\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)) \Bigg|_0^b$$
$$= \underbrace{\lim_{b\to\infty} \frac{e^{-(s+\delta)b}}{(s+\delta)^2+\omega^2}(-(s+\delta)\sin(\omega b) - \omega\cos(\omega b))}_{=0} + \frac{e^0}{(s+\delta)^2+\omega^2}(0+\omega)$$
$$= \frac{\omega}{(s+\delta)^2+\omega^2}.$$

Aufgabe 2) (Laplacetransformation Harmonischer Oszillator)

Betrachtet wird der Mehrmassenschwinger aus Aufgabe 2 vom 4. Übungsblatt:



Die dort hergeleiteten Differentialgleichungen sind

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \alpha x_1 &= \beta x_2 \\ \ddot{x}_2 + \alpha x_2 &= \beta x_1 \end{aligned}$$

mit $\alpha = \frac{2k}{m}$ und $\beta = \frac{k}{m}$. Lösen Sie diese Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation für die Anfangswerte

$$x_1(0) = 0,\ \dot{x}_1(0) = v_0,\ x_2(0) = 0,\ \dot{x}_2(0) = -v_0.$$

Lösung:

Setzen wir $X_1(s) := \mathcal{L}\left\{x_1(t)\right\},\ X_2(s) := \mathcal{L}\left\{x_2(t)\right\}$ so ergibt die Laplace-Transformation

$$\beta \cdot X_2(s) = [s^2 \cdot X_1(s) - s \cdot x_1(0) - \dot{x}_1(0)] + \alpha \cdot X_1(s) = (s^2 + \alpha)X_1(s) - v_0,$$

$$\beta \cdot X_1(s) = [s^2 \cdot X_2(s) - s \cdot x_2(0) - \dot{x}_2(0)] + \alpha \cdot X_2(s) = (s^2 + \alpha)X_2(s) + v_0.$$

Damit haben wir das inhomogene lineare Gleichungssystem in $X_1(s)$ und $X_2(s)$

$$\begin{pmatrix} s^2 + \alpha & -\beta \\ -\beta & s^2 + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ -v_0 \end{pmatrix},$$

das für alle $s \in \mathbb{R}_+$ gilt. Durch Addition folgt

$$(s^2 + \alpha - \beta)(X_1(s) + X_2(s)) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X_1(s) = -X_2(s)$$

und damit ist die Lösung

$$X_1(s) = \frac{v_0}{s^2 + \alpha + \beta}, \qquad \text{und} \qquad X_2(s) = \frac{-v_0}{s^2 + \alpha + \beta}.$$

Mit der Abkürzung $\omega^2 := \alpha + \beta = \frac{2k}{m} + \frac{k}{m} = \frac{3k}{m} > 0$ sind beide Bildfunktionen vom allgemeinen Typ $F(s) = \frac{1}{s^2+\omega^2}$. Daher erhält man die folgenden Originalfunktionen:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{X_1(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{v_0 \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\} \\
&= v_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\} = v_0 \cdot \frac{\sin(\omega t)}{\omega} = \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \sin(\omega t), \\
x_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{X_2(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-v_0 \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\} \\
&= -\left(\frac{v_0}{\omega}\right) \cdot \sin(\omega t) = \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \cdot \sin(\omega t + \pi).
\end{aligned}$$

Beide Massen schwingen mit gleicher Amplitude $A = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0}{\sqrt{\alpha+\beta}} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{3k}}$ und gleicher Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ $(A, \omega > 0\,!)$, jedoch in Gegenphase (Phasenverschiebung von π).

Aufgabe 3) (Fourier-Transformation)

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte für die Funktion

$$g(t) = e^{-a|t|}, \quad a \in \mathbb{R}_+, t \in \mathbb{R}.$$

b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - A^2 y = -f(x), \qquad -\infty < x < +\infty, A \in \mathbb{R}_+.$$

Berechnen Sie eine Lösung der Differentialgleichung mit Hilfe der Fourier-Transformation.

Lösung:

a) Für die Fourier-Transformation ergibt sich:

$$\begin{aligned}
G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{0} e^{(a-i\omega)t}\, dt + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} e^{-(a+i\omega)t}\, dt \\
&= \lim_{c\to-\infty} \left[\frac{1}{a-i\omega} e^{(a-i\omega)t}\right]_c^0 + \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{a+i\omega} e^{-(a+i\omega)t}\right]_0^b \\
&= \frac{1}{a-i\omega} - \lim_{c\to-\infty} \left(\frac{1}{a-i\omega} e^{(a-i\omega)c}\right) + \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-1}{a+i\omega} e^{-(a+i\omega)b}\right) + \frac{1}{a+i\omega} \\
&= \frac{1}{a-i\omega} - \lim_{c\to-\infty} \left(\frac{1}{a-i\omega} \underbrace{e^{ac}}_{\to 0} \underbrace{e^{-i\omega c}}_{\|\cdot\|=1}\right) + \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-1}{a+i\omega} \underbrace{e^{-ab}}_{\to 0} \underbrace{e^{-i\omega b}}_{\|\cdot\|=1}\right) + \frac{1}{a+i\omega} \\
&= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}.
\end{aligned}$$

b) Die Fouriertransformation der Differentialgleichung liefert

$$(i\omega)^2 Y(\omega) - A^2 Y(\omega) = -F(\omega)$$

und damit

$$Y(\omega) = F(\omega) \frac{1}{A^2+\omega^2}.$$

Wir schauen uns Abschnitt 4.1 des Skripts an, dort wurde die folgende Faltungsregel

$$y(t) = f(t) *_F h(t) \quad \Longleftrightarrow \quad Y(\omega) = F(\omega) \cdot H(\omega).$$

für die Fouriertransformation hergeleitet, ohne in Gl. (4.1) die **zweiseitige** Faltung

$$f *_F h := \int_{-\infty}^{\infty} f(s)h(t-s)\, ds$$

als solche zu benennen. Für die Laplace-Transformation wird eine einseitige Faltung $*$, siehe Def. 4.2.5 im Skript, verwendet! Die Rücktransformation liefert somit

$$\begin{aligned}
y(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{F(\omega)\frac{1}{A^2+\omega^2}\right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left\{F(\omega)\right\} *_F \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{A^2+\omega^2}\right\} \\
&= f(x) *_F \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2A}\frac{2A}{A^2+\omega^2}\right\} \\
&\overset{a)}{=} f(x) *_F \left(\frac{1}{2A}e^{-A|x|}\right) \\
&= \frac{1}{2A}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-A|x-u|}\, du.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4) (Laplacetransformation Sinkgeschwindigkeit)
Die Sinkgeschwindigkeit v einer Stahlkugel in einer zähen Flüssigkeit (siehe Abbildung 1) genügt der Differentialgleichung (ohne Auftrieb)

$$m\dot{v} + kv = mg,$$

wobei m die Masse der Kugel, k den Reibungsfaktor und g die Erdbeschleunigung bezeichnen.

Berechnen Sie mittels Laplace-Transformation das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz $v = v(t)$ bei einer Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = v_0$. Welche Endgeschwindigkeit v_E wird erreicht?

Lösung:

Setze $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$ und transformiere die Differentialgleichung nach Division durch m:

$$\begin{aligned}
g \cdot \frac{1}{s} = g\mathcal{L}\{1\} = \mathcal{L}\{g\} &= \mathcal{L}\{\dot{v}\} + \frac{k}{m}\mathcal{L}\{v\} = [s \cdot V(s) - v(0)] + \frac{k}{m} \cdot V(s) \\
&= s \cdot V(s) - v_0 + \frac{k}{m} \cdot V(s).
\end{aligned}$$

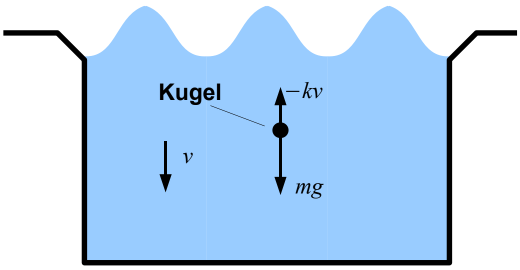


Abbildung 1: Flüssigkeit mit Kugel

Diese algebraische Gleichung lösen wir nach $V(s)$ auf:

$$V(s) = v_0 \cdot \frac{1}{s+\frac{k}{m}} + g \cdot \frac{1}{s(s+\frac{k}{m})}.$$

Rücktransformation (inverse Laplace-Transformation) liefert das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz für $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\Big\{v_0 \cdot \frac{1}{s+\frac{k}{m}} + g \cdot \frac{1}{s(s+\frac{k}{m})}\Big\} \\ &= v_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s+\frac{k}{m}}\Big\} + g \cdot \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s(s+\frac{k}{m})}\Big\} \\ &= v_0 e^{-\frac{k}{m}t} + g\frac{m}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \\ &= \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}. \end{aligned}$$

Die (konstante) Endgeschwindigkeit v_E erhalten wir durch Grenzübergang $t \to \infty$:

$$v_E = \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \left[\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right] = \frac{mg}{k}.$$

Zusatzaufgabe:

Aufgabe 5) (Faltungsprodukte)

Berechnen Sie folgende Faltungsprodukte:

a) $t * e^{-t}$

b) $e^t * \cos t$

Hinweis: $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos(bx) + b\sin(bx)\right)$

<u>Lösung:</u>

Unter der **Faltung** $(f * g)(t) = f(t) * g(t)$ zweier Funktionen f und g versteht man die Funktion

$$f(t) * g(t) := \int_0^t f(s)g(t-s)ds \equiv \int_0^t f(t-s)g(s)ds.$$

a) In der ersten Teilaufgabe sind die Funktionen f und g durch

$$f(t) = t, \qquad g(t) = e^{-t}$$

gegeben. Demnach gilt:

$$f(t) * g(t) = t * e^{-t} = \int_0^t se^{-(t-s)}ds = e^{-t}\int_0^t se^s ds.$$

Mit der Verwendung der Stammfunktion

$$\int xe^x dx = [xe^x] - \int 1e^x\, dx = xe^x - e^x$$

gilt

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= e^{-t}(se^s - e^s)\Big|_0^t = e^{-t}(te^t - e^t - 0 + e^0) \\ &= e^{-t}e^t(t-1) + e^{-t} = t - 1 + e^{-t}. \end{aligned}$$

b) In der zweiten Teilaufgabe sind die Funktionen f und g durch

$$f(t) = e^t, \qquad g(t) = \cos(t)$$

gegeben. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= e^t * \cos(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds = \int_0^t e^{t-s}\cos(s)ds \\ &= e^t\int_0^t e^{-s}\cos(s)ds \overset{\text{Hinweis}}{=} e^t\left[\frac{e^{-s}}{1^2+1^2}(-\cos(s)+\sin(s))\right]_0^t \\ &= e^t\left[\frac{e^{-t}}{2}(-\cos(t)+\sin(t)) - \frac{e^0}{2}(-\cos(0)+\sin(0))\right] \\ &= \frac{1}{2}(\sin(t) - \cos(t) + e^t). \end{aligned}$$

Alternativ gilt:

$$
\begin{aligned}
f(t) * g(t) &= \int\limits_0^t f(s)g(t-s)ds = \int\limits_0^t e^s \cos(t-s)ds \\
&= -\left[-\frac{e^s}{1^2+1}(\sin(t-s) - \cos(t-s))\right]_0^t \\
&= -\frac{1}{2}e^t(\sin(t-t) - \cos(t-t)) + \frac{1}{2}e^0(\sin(t) - \cos(t)) \\
&= \frac{1}{2}(\sin(t) - \cos(t) + e^t).
\end{aligned}
$$

Anmerkung: Die Stammfunktion im Hinweis kann man durch zweimalige partielle Integration herleiten.

Besprechung der Aufgaben Do, 28.02.2019 bzw. Mo, 04.03.2019 in der jeweiligen Übung.