Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. M. Gerdts, A. Huber

Wintertrimester 2019

Mathematische Methoden in den Ingenieurwissenschaften

Übung 4

Aufgabe 1) (Isoperimetrische Variationsprobleme)

Bestimmen Sie die Extremalen der folgenden Variationsprobleme mit Nebenbedingung:

a)

$$\min \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x'(t)^2 + x(t)x'(t) \right) dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$x(0) = 0, x(1) = 5,$$
$$\int_0^1 x(t)\, dt = 2.$$

b)

$$\min \int_0^2 (x'(t)^2 + x(t))\, dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$x(0) = 1, x(2) = 48,$$
$$\int_0^2 t x(t)\, dt = 43.$$

<u>**Lösung:**</u>

a) Bei diesem Variationsproblem hat eine Nebenbedingung die Form

$$G(x) = \int\limits_a^b g(t, x(t), x'(t))dt = c,$$

deshalb handelt es sich hierbei um ein Isoperimetrisches Variationsproblem. Zur Lösung dieser Problemklasse benötigen wir die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(t, x(t), x'(t), \lambda) := f(t, x(t), x'(t)) + \lambda g(t, x(t), x'(t)) = \frac{1}{2}x'(t)^2 + x(t)x'(t) + \lambda x(t).$$

Nach Satz 1.7.5 im Skript gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}'_x(t, x(t), x'(t), \lambda) - \frac{d}{dt}\mathcal{L}'_{x'}(t, x(t), x'(t), \lambda) \overset{!}{=} 0 \\
\iff \quad & x'(t) + \lambda - \frac{d}{dt}(x'(t) + x(t)) \overset{!}{=} 0 \\
\iff \quad & x'(t) + \lambda - x''(t) - x'(t) \overset{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Durch zweifache Integration können wir auf $x(t)$ schließen:

$$\begin{aligned}
& x''(t) = \lambda \\
\implies \quad & x'(t) = \lambda t + C_0 \\
\implies \quad & x(t) = \frac{\lambda}{2}t^2 + C_0 t + C_1.
\end{aligned}$$

Aus den Nebenbedingungen erhalten wir

$$x(0) = C_1 \overset{!}{=} 0, \tag{1}$$

$$\implies \quad x(1) = \frac{\lambda}{2} + C_0 + C_1 \overset{(I)}{=} \frac{\lambda}{2} + C_0 \overset{!}{=} 5, \tag{2}$$

$$\implies \quad \int\limits_0^1 x(t)\, dt = \int\limits_0^1 \frac{\lambda}{2}t^2 + C_0 t\, dt = \left[\frac{\lambda}{6}t^3 + \frac{C_0 t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\lambda}{6} + \frac{C_0}{2} \overset{!}{=} 2 \tag{3}$$

und mit $6(3) - 2(2)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
& 3C_0 - 2C_0 = 12 - 10 \\
\iff \quad & C_0 = 2.
\end{aligned}$$

Für den Lagrangemultiplikator ergibt sich

$$\lambda = 10 - 4 = 6.$$

Unsere Lösung lautet:

$$x(t) = \frac{6}{2}t^2 + 2t = 3t^2 + 2t.$$

b) Analog zu Aufgabenteil a) benötigen wir die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(t, x(t), x'(t), \lambda) := f(t, x(t), x'(t)) + \lambda g(t, x(t), x'(t)) = x'(t)^2 + x(t) + \lambda t x(t).$$

Weiter gilt nach Satz 1.7.5 im Skript

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_x(t, x(t), x'(t), \lambda) - \frac{d}{dt}\mathcal{L}'_{x'}(t, x(t), x'(t), \lambda) &\overset{!}{=} 0 \\ \iff \quad 1 + \lambda t - 2x''(t) &\overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Hiermit lässt sich auch wieder auf $x(t)$ schließen:

$$\begin{aligned} x''(t) &= \frac{\lambda}{2}t + \frac{1}{2} \\ \implies \quad x'(t) &= \frac{\lambda}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + C_0 \\ \implies \quad x(t) &= \frac{\lambda}{12}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + C_0 t + C_1. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Randbedingungen ergibt sich

$$x(0) = C_1 \overset{!}{=} 1, \tag{4}$$

$$x(2) = \frac{2}{3}\lambda + 1 + 2C_0 + C_1 \overset{(IV)}{=} \frac{2}{3}\lambda + 1 + 2C_0 + 1 \overset{!}{=} 48 \tag{5}$$

und für die Nebenbedingung

$$\begin{aligned} \int_0^2 t x(t)\, dt &= \int_0^2 \frac{\lambda}{12}t^4 + \frac{1}{4}t^3 + C_0 t^2 + t \, dt = \left[\frac{\lambda}{60}t^5 + \frac{1}{16}t^4 + \frac{C_0}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^2 \\ &= \frac{32}{60}\lambda + 1 + \frac{8}{3}C_0 + 2 \overset{!}{=} 43, \end{aligned}$$

was wiederum äquivalent ist zu

$$\frac{8}{15}\lambda + \frac{8}{3}C_0 = 40. \tag{6}$$

Die Gleichung (5) vereinfachen wir, so dass

$$\frac{2}{3}\lambda + 2C_0 = 46. \tag{7}$$

Aus $4(7) - 3(6)$ ergibt sich

$$\left(\frac{8}{3} - \frac{8}{5}\right)\lambda = 64$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 60$$

und durch Einsetzen in Gleichung (7) erhalten wir

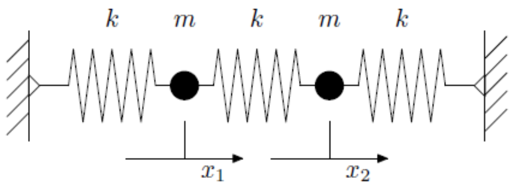
$$C_0 = \frac{1}{2}\left(46 - \frac{2}{3}60\right) = 3.$$

Damit ergibt sich für unsere Lösung

$$x(t) = 5t^3 + \frac{1}{4}t^2 + 3t + 1.$$

Aufgabe 2) (Mehrmassenschwinger)

Betrachtet wird ein schwingendes System aus 2 Körpern der Masse m und 3 Federn mit der Federkonstante k, wie es im unten stehenden Bild dargestellt wird.



Die Auslenkungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bezeichnen die Auslenkung der Massepunkte aus der Ruhelage, die zum Vektor $x(t) = [x_1(t)\ x_2(t)]^\top$ zusammengefasst wird. Durch eine vorgegebene Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

wird das System in Schwingung versetzt. Leiten sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Hamiltonprinzips her.

Lösung:

Die kinetische Energie ergibt sich zu

$$T(t) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2\right)$$

und die potentielle Energie des Systems ist die in den Federn gespeicherte Energie

$$
\begin{aligned}
V(t) &= \frac{1}{2}kx_1(t)^2 + \frac{1}{2}k(x_2(t)-x_1(t))^2 + \frac{1}{2}kx_2(t)^2 \\
&= \frac{1}{2}k\left(x_1(t)^2 + (x_2(t)-x_1(t))^2 + x_2(t)^2\right).
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich die Lagrangefunktion als

$$
\mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x_1(t)^2 + (x_2(t)-x_1(t))^2 + x_2(t)^2\right).
$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus der ersten Variation des Funktionals

$$
W(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \int\limits_0^T \mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)\, dt.
$$

Variiere x_1 mit der Funktion v_1 und x_2 mit der Funktion v_2, wobei aufgrund der Anfangswerte jeweils gilt

$$
v_1, v_2 \in \mathcal{V} := \left\{v \in C^1(0,T) \mid v(0) = \dot{v}(0) = 0\right\},
$$

$$
\begin{aligned}
\delta W(x,v) = \left[\frac{d}{d\varepsilon}W(x+\varepsilon v)\right]_{\varepsilon=0} &= \int\limits_0^T \left[\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(x_1+\varepsilon v_1, x_2+\varepsilon v_2, \dot{x}_1+\varepsilon\dot{v}_1, \dot{x}_2+\varepsilon\dot{v}_2)\right]_{\varepsilon=0} dt \\
&= \int\limits_0^T \Big[\frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{2}m\left((\dot{x}_1+\varepsilon\dot{v}_1)^2 + (\dot{x}_2+\varepsilon\dot{v}_2)^2\right) \\
&\qquad - \frac{1}{2}k\left((x_1+\varepsilon v_1)^2 + (x_2 - x_1 + \varepsilon(v_2-v_1))^2 + (x_2+\varepsilon v_2)^2\right)\Big]_{\varepsilon=0} dt \\
&= \int\limits_0^T \Big[m\left((\dot{x}_1+\varepsilon\dot{v}_1)\dot{v}_1 + (\dot{x}_2+\varepsilon\dot{v}_2)\dot{v}_2\right) \\
&\qquad - k\left((x_1+\varepsilon v_1)v_1 + (x_2 - x_1 + \varepsilon(v_2-v_1))(v_2-v_1) + (x_2+\varepsilon v_2)v_2\right)\Big]_{\varepsilon=0} dt \\
&= \int\limits_0^T m(\dot{x}_1\dot{v}_1 + \dot{x}_2\dot{v}_2) - k\left(x_1v_1 + (x_2-x_1)(v_2-v_1) + x_2v_2\right) dt \\
&= \int\limits_0^T (m\dot{x}_1\dot{v}_1 - k(2x_1-x_2)v_1) + (m\dot{x}_2\dot{v}_2 - k(2x_2-x_1)v_2)\, dt = 0.
\end{aligned}
$$

Setzt man $v_2 \equiv 0$, erhält man

$$
\int\limits_0^T \left(m\dot{x}_1\dot{v}_1 - k(2x_1-x_2)v_1\right)\, dt = 0 \quad \forall v_1 \in \mathcal{V}
$$

und analog für $v_1 \equiv 0$

$$\int_0^T \left(m\dot{x}_2\dot{v}_2 - k\left(2x_2 - x_1\right)v_2\right)\,dt = 0 \quad \forall v_2 \in \mathcal{V}.$$

Führt man bei beiden Variationsgleichungen eine partielle Integration durch, so erhält man

$$[m\dot{x}_1 v_1]_0^T - \int_0^T \left(m\ddot{x}_1 + k\left(2x_1 - x_2\right)\right)v_1\,dt = 0 \quad \forall v_1 \in \mathcal{V},$$

$$[m\dot{x}_2 v_2]_0^T - \int_0^T \left(m\ddot{x}_2 + k\left(2x_2 - x_1\right)\right)v_2\,dt = 0 \quad \forall v_2 \in \mathcal{V}$$

und damit die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2,$$
$$m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2.$$

Bemerkung: Eine Auswertung der Randbedingungen, wie es bei den vorherigen Variationsproblemen der Fall war, würde jeweils auf eine falsche Randbedingung $m\dot{x}_1(T) = m\dot{x}_2(T) = 0$ führen. Deshalb lässt sich bei einem vollständig beschriebenen Anfangszustand und freiem Endzustand lediglich die Differentialgleichung herleiten.

Durch den vollständig beschriebenen Anfangszustand und die Differentialgleichung ist der Zustand $x(T)$ bereits festgelegt. Deshalb muss der Raum der Variationen rückwirkend als

$$v_1, v_2 \in \mathcal{V} := \left\{ v \in C^1(0,T) \mid v(0) = \dot{v}(0) = v(T) = 0, \right\}$$

gewählt werden, wodurch das Wegfallen der Randterme erklärt werden kann.

Aufgabe 3) (Isoperimetrisches Variationsproblem)

Ein Jogger will eine feste Zeit $T > 0$ einen Crescendolauf machen, d.h. mit stetig wachsender Geschwindigkeit laufen. Dabei will er eine feste Menge $E > 0$ seiner Kohlenhydratreserven verbrauchen. Wir nehmen an, dass bei dieser Laufform sein Kalorienverbrauch proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit mit der Proportionalitätskonstante $c_1 > 0$ und zum Quadrat der Beschleunigung mit der Proportionalitätskonstante $c_2 > 0$ ist. Der Jogger startet zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Geschwindigkeit $v(0) = 0$ und der Beschleunigung $v'(0) = 0$. Wie muss er seine Geschwindigkeit wählen, damit er eine möglichst lange Strecke in der Zeit T zurücklegt.

Lösung:

Sei $x(t)$ die vom Jogger zum Zeitpunkt t zurückgelegte Strecke und $v(t)$ seine Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t. Dann versucht der Jogger

$$x(T) = \int_0^T v(t)\,dt + x(0) = \int_0^T v(t)\,dt$$

zu maximieren. Der Kalorienverbrauch wird durch

$$\int_0^T c_1 v(t)^2 + c_2 v'(t)^2 dt = E$$

beschrieben. Damit muss der Jogger das isoperimetrische Variationsproblem

$$\min - \int_0^T v(t)dt \quad \text{u.d.N.} \quad \begin{array}{l} \int_0^T \left(c_1 v(t)^2 + c_2 v'(t)^2\right) dt = E, \\ v(0) = 0, \quad v'(0) = 0 \end{array}$$

lösen. Als Lagrange-Funktion erhalten wir

$$\mathcal{L}(v, v', \lambda) = -v(t) + \lambda(c_1 v(t)^2 + c_2 v'(t)^2),$$

und somit muss in der Lösung

$$0 = \mathcal{L}'_v(v, v', \lambda) - \frac{d}{dt}\mathcal{L}'_{v'}(v, v', \lambda) = -1 + 2\lambda c_1 v(t) - 2\lambda c_2 v''(t)$$

gelten. Daraus ergibt sich $\lambda \neq 0$ und die Differentialgleichung

$$\frac{c_1}{c_2} v(t) - v''(t) = \frac{1}{2\lambda c_2}.$$

Diese hat die Lösung

$$v(t) = Ae^{\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}t} + \frac{1}{2\lambda c_1}.$$

Aus den Anfangsbedingungen erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \overset{!}{=} v'(0) &= \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}(A - B) & \Leftrightarrow \quad & A = B, \\ 0 \overset{!}{=} v(0) &= A + B + \frac{1}{2\lambda c_1} & \overset{A=B}{\Rightarrow} \quad & 2A = -\frac{1}{2\lambda c_1}. \end{aligned}$$

Hiermit folgt

$$v(t) = Ae^{\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}t} + Ae^{-\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}t} - 2A = 2A\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}t\right) - 1\right).$$

Aus der Monotonie von v sieht man, dass es ein Crescendolauf ist ($v'(t) > 0$ für alle $t > 0$) falls $A > 0$. Um die verbleibende Konstante A zu bestimmen, nutzen wir noch die letzte Nebenbedingung und erhalten u.a. mit $\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$ und $\sinh(2y) = 2\cosh(y)\sinh(y)$:

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^T \left(c_1 v(t)^2 + c_2 v'(t)^2\right) dt \\
&= \int_0^T \left(4c_1A^2\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}t\right) - 1\right)^2 + 4c_2A^2\frac{c_1}{c_2}\sinh^2\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}t\right)\right) dt \\
&= 4c_1A^2\int_0^T \left(\cosh^2\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}t\right) - 2\cosh\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}t\right) + 1 + \sinh^2\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}t\right)\right) dt \\
&= 8c_1A^2\int_0^T \left(\cosh^2\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}t\right) - \cosh\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}t\right)\right) dt \\
&= 8c_1A^2\left[\frac{t}{2} + \frac{\sinh\left(2\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}t\right)}{4\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}} - \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}t\right)}{\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}}\right]_0^T \\
&= A^2\left[4c_1T + 2\sqrt{c_1c_2}\sinh\left(2\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}T\right) - 8\sqrt{c_1c_2}\sinh\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}T\right)\right].
\end{aligned}$$

Die eckige Klammer ist insbesondere positiv, da nach Voraussetzung $E > 0$ gilt. Da A positiv sein muss (sonst wird v negativ), erhalten wir schließlich die Konstante

$$A = \frac{\sqrt{E}}{\left[4c_1T + 2\sqrt{c_1c_2}\sinh\left(2\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}T\right) - 8\sqrt{c_1c_2}\sinh\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}T\right)\right]^{1/2}}.$$

Insgesamt erhalten wir somit die von den Eingabeparametern abhängige Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{2\sqrt{E}\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}t\right) - 1\right)}{\left[4c_1T + 2\sqrt{c_1c_2}\sinh\left(2\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}T\right) - 8\sqrt{c_1c_2}\sinh\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}T\right)\right]^{1/2}}.$$

Besprechung der Aufgaben Do, 31.01.2019 bzw. Mo, 04.02.2019 in der jeweiligen Übung.