Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. M. Gerdts, A. Huber

Wintertrimester 2019

Mathematische Methoden in den Ingenieurwissenschaften

Übung 3

Aufgabe 1) (Variationsrechnung mit freiem Endpunkt)

Bestimmen Sie die Extremalen der folgenden Variationsprobleme mit variablem Endpunkt:

a) $\int_1^2 (x'(t) + t^2 x'(t)^2)\, dt$, mit $x(1) = 0$, $x(2)$ frei.

b) $\int_0^1 \left(\frac{1}{2} y'(x)^2 + y(x)y'(x) + y(x) + y'(x)\right) dx$, mit $y(0) = 1$, $y(1)$ frei.

Lösung:

a) Die Integrandenfunktion

$$f(t, x'(t)) = x'(t) + t^2 x'(t)^2$$

ist hier von x unabhängig. Daher gibt es ein $C_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$C_1 = \frac{\partial f}{\partial x'}(t, x'(t)) = 1 + 2t^2 x'(t).$$

Umstellen ergibt

$$x'(t) = \frac{C_1 - 1}{2t^2}.$$

Integration liefert mit einer Konstanten $C_2 \in \mathbb{R}$

$$x(t) = \frac{1 - C_1}{2t} + C_2.$$

Die feste Nebenbedingung ergibt

$$0 = x(1) = \frac{1 - C_1}{2} + C_2 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = \frac{C_1 - 1}{2}.$$

Für den freien Endpunkt $b = 2$ erhält man die natürliche Randbedingung

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x'}(b, x'(b)) = 1 + 2b^2 x'(b) = 1 + 2b^2 \frac{C_1 - 1}{2b^2} = C_1.$$

Damit folgt $C_2 = \frac{C_1 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$ und somit ist die Extremale

$$x(t) = \frac{1}{2t} - \frac{1}{2}.$$

b) Da die Integrandenfunktion

$$f(y(x), y'(x)) = \frac{1}{2} y'(x)^2 + y(x)y'(x) + y(x) + y'(x)$$

von der "Zeitvariable" x nicht explizit abhängt, muss die Hamilton-Funktion konstant sein, d.h. es gibt ein $C_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} C_0 &= f(y(x), y'(x)) - y'(x) \frac{\partial f}{\partial y'}(y(x), y'(x)) \\ &= \frac{1}{2} y'(x)^2 + y(x)y'(x) + y(x) + y'(x) - y'(x)\left(y'(x) + y(x) + 1\right) \\ &= y(x) - \frac{1}{2} y'(x)^2. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \pm\sqrt{2y(x) - 2C_0}.$$

Trennung der Variablen führt zu

$$\int \frac{1}{\pm\sqrt{2y(x) - 2C_0}}\, dy = \int dx,$$

und nach Integration erhält man (mit einem $C_1 \in \mathbb{R}$)

$$\pm\sqrt{2y(x) - 2C_0} = x + C_1.$$

Quadrieren und Auflösen ergibt

$$y(x) = \frac{1}{2}(x + C_1)^2 + C_0.$$

Aus der festen Randbedingung folgt

$$1 = y(0) = \frac{1}{2} C_1^2 + C_0.$$

Für den freien Endpunkt bei $x = 1$ erhält man die natürliche Randbedingung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial y'}(y(1), y'(1)) = y'(1) + y(1) + 1 \\ &= (1 + C_1) + \frac{1}{2}(1 + C_1)^2 + C_0 + 1 \\ &= \frac{5}{2} + 2C_1 + \underbrace{\frac{1}{2}C_1^2 + C_0}_{=1} \\ &= \frac{7}{2} + 2C_1. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$C_1 = -\frac{7}{4} \qquad \text{und} \qquad C_0 = 1 - \frac{1}{2}C_1^2 = 1 - \frac{49}{32} = -\frac{17}{32},$$

und es gilt

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{17}{32} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{4}x + 1.$$

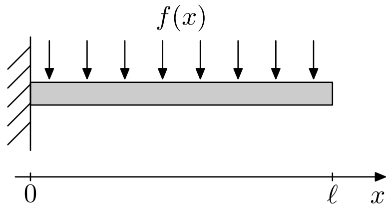
Aufgabe 2) (RWP mit höheren Ableitungen)

Die Biegelinie $y(x)$ eines mit einer Streckenlast belasteten Balken mit Biegesteifigkeit EI (E - Elastizitätsmodul, I - Flächenträgheitsmoment) ergibt sich durch die Minimierung der Formänderungsarbeit

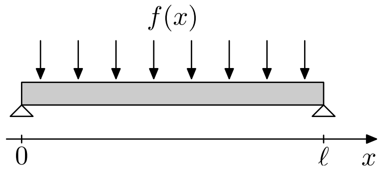
$$W(y) = \int_0^l \left[\frac{1}{2}EIy''(x)^2 + f(x)y(x)\right] dx.$$

Leiten Sie die Randwertaufgabe (insbesondere die richtige Randbedingung) für folgende Biegebalken mit Streckenlast her:

(a)



(b)



Lösung:

Betrachten wir die Vergleichskurven $y(x) + \varepsilon v(x)$ mit Vergleichsfunktionen $v \in \mathcal{V}$, so erhalten wir die Variation

$$
\begin{aligned}
\delta F &= \left[\frac{d}{d\varepsilon}\int_0^l \left(\frac{1}{2}EI(y''(x)+\varepsilon v(x)'')^2 + f(x)(y(x)+\varepsilon v(x))\right)\,dx\right]_{\varepsilon=0} \\
&= \int_0^l \left[\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{1}{2}EI(y''(x)+\varepsilon v(x)'')^2 + f(x)(y(x)+\varepsilon v(x))\right)\right]_{\varepsilon=0} dx \\
&= \int_0^l EIy''(x)v''(x) + f(x)v(x)\,dx \\
&\overset{p.I.}{=} \left[EIy''(x)v'(x)\right]_0^l - \int_0^l EIy'''(x)v'(x)\,dx + \int_0^l f(x)v(x)\,dx \\
&\overset{p.I.}{=} \left[EIy''(x)v'(x)\right]_0^l - \left[EIy'''(x)v(x)\right]_0^l + \int_0^l EIy^{(4)}(x)v(x)\,dx + \int_0^l f(x)v(x)\,dx \\
&= \left[EIy''(x)v'(x)\right]_0^l - \left[EIy'''(x)v(x)\right]_0^l + \int_0^l \left[EIy^{(4)}(x)+f(x)\right]v(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Man beachte, dass EI hier ortsunabhängig ist.

Damit die Variation verschwindet muss also

$$\left[EIy''(x)v'(x)\right]_0^l - \left[EIy'''(x)v(x)\right]_0^l + \int_0^l \left[EIy^{(4)}(x)+f(x)\right]v(x)\,dx = 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{V}.$$

Man wählt den Raum der Vergleichsfunktionen in Abhängigkeit von der konkreten Problemstellung und betrachtet, welche Terme dadurch wegfallen, und welche Bedingungen an die Funktion y daraus folgen, dass alle einzelnen Summanden verschwinden müssen.

a) Feste Einspannung bei $x=0$: Verschiebung und Steigung am linken Rand fixiert

$$\mathcal{V} = \{v \in C^2([0,l]) \mid\ v(0) = v'(0) = 0\}.$$

Man erhält die zusätzliche Randbedingung am rechten Rand $EIy''(l) = EIy'''(l) = 0$ und das Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
EIy^{(4)}(x) + f(x) &= 0 \quad \forall x \in (0,l), \\
y(0) = y'(0) &= 0, \\
EIy''(l) = \underbrace{EIy'''(l)}_{Querkraft} &= 0.
\end{aligned}
$$

b) Loslager bei $x=0$ und $x=l$: Verschiebung an beiden Randpunkten fixiert

$$\mathcal{V} = \{v \in C^2([0,l]) \mid\ v(0) = v(l) = 0\}.$$

Als weitere Randbedingungen erhält man $EIy''(0) = EIy''(l) = 0$ und somit das Randwertproblem

$$\begin{aligned} EIy^{(4)}(x) + f(x) &= 0 \quad \forall x \in (0,l), \\ y(0) = EIy''(0) &= 0, \\ y(l) = \underbrace{EIy''(l)}_{Biegemoment} &= 0. \end{aligned}$$

Die partielle Differentialgleichung, die für a) und b) gleich ist, ist die Balkengleichung.

Aufgabe 3) (Variationsrechnung mit freiem Endpunkt)

Finden Sie jeweils eine Funktion $x(\cdot) \in C^1([0,3],\mathbb{R})$, so dass das Funktional

$$F(x) := \int_0^3 \left(\frac{1}{2} x'(t)^2 - t\,x(t)\,x'(t) \right) dt$$

minimal wird unter den Randbedingungen

a) $x(0) = 0$ und $x(3) = 1$.

b) $x(0)$ ist frei und $x(3) = 2$.

Lösung:

a) Aus der Euler-Lagrange Differentialgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= f'_x(t, x'(t)) - \frac{d}{dt} f'_{x'}(t, x'(t)) \\ &= -tx'(t) - x''(t) + tx'(t) + x(t) = x(t) - x''(t). \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung 2. Ordnung ist gegeben durch

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Einsetzen der beiden Randbedingungen liefert:

$$\begin{aligned} 0 = x(0) = C_1 + C_2 &\qquad \text{also} \qquad C_1 = -C_2. \\ 1 = x(3) = C_1(e^3 - e^{-3}) &\qquad \text{also} \qquad C_1 = \frac{1}{e^3 - e^{-3}}. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir die Lösung

$$x(t) = \frac{1}{e^3 - e^{-3}}(e^t - e^{-t}) = \frac{\sinh(t)}{\sinh(3)}.$$

b) Wie in a) bekommen wir

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Aus der freien Randbedingung erhalten wir die zusätzliche notwendige Bedingung

$$0 = f'_{x'}(0, x'(0)) = x'(0) - 0\,x(0) = x'(0) = C_1 - C_2$$

und damit muss $C_1 = C_2$ gelten. Aus der verbleibenden Bedingung folgt dann

$$2 = x(3) = C_1(e^3 + e^{-3})$$

und damit $C_1 = \frac{2}{e^3+e^{-3}}$. Wir erhalten die Lösung

$$x(t) = \frac{2}{e^3 + e^{-3}}(e^t + e^{-t}) = \frac{2\cosh(t)}{\cosh(3)}.$$

Besprechung der Aufgaben Do, 24.01.2019 bzw. Mo, 28.01.2019 in der jeweiligen Übung.