

Mathematische Methoden in den Ingenieurwissenschaften

19.09.2016
10:00–11:30 Uhr

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Aufgabe	erreichte Punkte	Gesamtpunktzahl
1		8
2		10
3		16
4		10
5		16
Σ		60

Viel Erfolg!

Aufgaben

- 1) (8 Punkte): Lösen Sie mittels Laplace-Transformation das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}x_1''(t) &= -x_1(t) - 2x_2(t), & x_1(0) &= 0, & x_1'(0) &= 1 \\x_2'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t), & x_2(0) &= 0.\end{aligned}$$

- 2) (10 Punkte): Finden Sie jeweils eine Funktion $x(\cdot) \in C^1([1, 2], \mathbb{R})$, so dass das Funktional

$$F(x) := \int_0^3 \frac{1}{2} x'(t)^2 - t x(t) x'(t) dt$$

minimal wird unter den Randbedingungen

a) $x(0) = 0$ und $x(3) = 1$.

b) $x(0)$ ist frei und $x(3) = 2$.

- 3) (16 Punkte): Gesucht ist eine stetige Steuerung $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ und stetig differenzierbare Zustände $x, y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$F(x, y, u) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x(t)^2 + \frac{1}{2} y(t)^2 + \frac{1}{2} u_1(t)^2 + \frac{1}{2} u_2(t)^2 \right) dt$$

minimal wird unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}x'(t) &= u_1(t), & x(0) &= 1, \\y'(t) &= -u_2(t), & y(0) &= 0.\end{aligned}$$

Berechnen Sie eine den notwendigen Optimalitätsbedingungen genügende Lösung.

- 4) (10 Punkte): Zeigen Sie, dass die π -periodische Funktion $g(x) = \cos(x)^2$ eine gerade Funktion ist. Zeigen Sie damit durch Berechnung der Fourier-Reihe, dass

$$\cos(x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \tag{1}$$

gilt.

Hinweise: Berechnen Sie zunächst $\int_0^\pi \cos^2(x) dx$.

Ferner dürfen Sie

$$\int_0^\pi \sin(2kx) \sin(2jx) dx = 0 \quad \text{für } j, k \in \mathbb{N} \quad \text{mit } j \neq k$$

und

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

verwenden.

5) **(16 Punkte)**: Bestimmen Sie mit dem Separationsansatz in Produktform die Lösung des Problems

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} & 0 < x < \pi, \\ u_x(0, t) &= 0, & u_x(\pi, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= 0, & u_t(x, 0) &= \cos(x)^2. \end{aligned}$$

Sie dürfen dabei Gleichung (1) aus Aufgabe 4) verwenden.

Nr.	Zeitfunktion $y(t)$	Transformierte $Y(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3	$\exp(-at)$	$\frac{1}{s+a}$
4	$\frac{1}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$	$\frac{1}{1+sT}$
5	$\frac{1}{a} (1 - \exp(-at))$	$\frac{1}{s(s+a)}$
6	$1 - \exp(-t/T)$	$\frac{1}{s(1+sT)}$
7	$\frac{1}{b-a} (\exp(-at) - \exp(-bt))$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
8	$\frac{\exp(-t/T_1) - \exp(-t/T_2)}{T_1 - T_2}$	$\frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$
9	$t \cdot \exp(-at)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
10	$\frac{1}{T^2} \cdot t \cdot \exp(-t/T)$	$\frac{1}{(1+sT)^2}$
11	$\frac{a}{b} + \frac{b-a}{b} \cdot \exp(-bt)$	$\frac{(s+a)}{s(s+b)}$
12	$1 + \frac{T-T_1}{T_1} \exp(-t/T_1)$	$\frac{(1+sT)}{s(1+sT_1)}$
13	$\frac{1}{a^2} (\exp(-at) - 1 + a \cdot t)$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
14	$T \cdot \exp(-t/T) + t - T$	$\frac{1}{s^2(1+sT)}$
15	$\frac{1}{a^2} [1 - (at+1) \exp(-at)]$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$

Tabelle 1: **Korrespondenzen zur Laplace-Transformation**

Nr.	Zeitfunktion $y(t)$	Transformierte $Y(s)$
16	$1 - \frac{T+t}{T} \exp(-t/T)$	$\frac{1}{s(1+sT)^2}$
17	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{a-b} \left[\frac{1}{a} \exp(-at) - \frac{1}{b} \exp(-bt) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
18	$1 + \frac{T_1 \cdot \exp(-t/T_1) - T_2 \cdot \exp(-t/T_2)}{T_2 - T_1}$	$\frac{1}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}$
19	$\frac{(c-b) \exp(-at) + (a-c) \exp(-bt) + (b-a) \exp(-ct)}{(a-b)(a-c)(c-b)}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
20	$[(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)(T_2 - T_3)]^{-1} \cdot [T_1(T_2 - T_3) \exp(-t/T_1) + T_2(T_3 - T_1) \exp(-t/T_2) + T_3(T_1 - T_2) \exp(-t/T_3)]$	$\frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}$
21	$\frac{1}{\omega} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{1}{s^2 + \omega^2}$
22	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
23	$\frac{1}{2\omega} \cdot t \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
24	$t \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
25	$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
26	$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
27	$\frac{1}{\sqrt{1-D^2}\omega} \exp(-D\omega t) \sin(\sqrt{1-D^2} \omega t)$	$\frac{1}{s^2 + 2D\omega s + \omega^2}$
28	$\exp(-D\omega t) \sin(\sqrt{1-D^2} \omega t)$	$\frac{\sqrt{1-D^2} \omega}{s^2 + 2D\omega s + \omega^2}$
29	$\exp(-D\omega t) \cos(\sqrt{1-D^2} \omega t)$	$\frac{s + D\omega}{s^2 + 2D\omega s + \omega^2}$
30	$\exp(-\delta t) \sin(\omega_e t)$	$\frac{\omega_e}{(s + \delta)^2 + \omega_e^2}, \quad \omega_e = \sqrt{\omega - \delta^2}$ $= \sqrt{1 - D^2}\omega$
31	$\exp(-\delta t) \cos(\omega_e t)$	$\frac{s + \delta}{(s + \delta)^2 + \omega_e^2}, \quad \omega_e = \sqrt{\omega - \delta^2}$ $= \sqrt{1 - D^2}\omega$
32	$\exp(-\delta t) \sinh(\omega_e t)$	$\frac{\omega_e}{(s + \delta)^2 - \omega_e^2}, \quad \omega_e = \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$
33	$\exp(-\delta t) \cosh(\omega_e t)$	$\frac{s + \delta}{(s + \delta)^2 - \omega_e^2}, \quad \omega_e = \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$

Tabelle 2: Fortsetzung