Universität der Bundeswehr München
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. M. Gerdts

Mathematische Methoden in den Ingeneurwissenschaften

04.04.2016
13:00–14:30 Uhr

Name: Vorname:

Matr.-Nr.:

Aufgabe	erreichte Punkte	Gesamtpunktzahl
1		6
2		10
3		10
4		15
5		15
$\sum$		56

Viel Erfolg!

Aufgaben

1) **(6 Punkte):** Bestimmen Sie jeweils den Typ (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch) der folgenden partiellen Differentialgleichungen, und begründen Sie dies.

   (a) $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 3u_y = u$.

   (b) $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $-4u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yy} = 0$.

   (c) $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $u_{xx} + 2u_{yy} + 3u_{zz} = 4u$.

2) **(10 Punkte):** Lösen Sie mittels Laplace-Transformation das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -2y_1(t) + 3y_2(t), & y_1(0) &= 1, \\ y_2'(t) &= -y_1(t) + 2y_2(t), & y_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

   Dabei darf die Partialbruchzerlegung

$$\frac{s-2}{(s-1)(s+1)} = \frac{3}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s-1)}$$

   verwendet werden.

3) **(10 Punkte):** Finden Sie jeweils eine Funktion $x(\cdot) \in C^1([1,2],\mathbb{R})$, so dass das Funktional

$$F(x) := \int_1^2 t\, x'(t)^2\, dt$$

   minimal wird unter den Randbedingungen

   a) $x(1) = 1$ und $x(2) = 1 + \ln(2)$.

   b) $x(1)$ ist frei und $x(2) = 1 + \ln(2)$.

4) **(15 Punkte):** Gesucht ist eine stetige Steuerung $u : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ und ein stetig differenzierbarer Zustand $x : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass

$$F(x,u) := \int_0^1 \frac{1}{2}x(t)^2 + \frac{1}{2}u_1(t)^2 - \frac{1}{2}u_2(t)^2\, dt$$

   minimal wird unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2x(t) + u_1(t) + 2u_2(t), \\ x(0) &= 1. \end{aligned}$$

   a) Bestimmen Sie eine Lösung, die den notwendigen Optimalitätskriterien genügt.

   b) Schreiben Sie das Problem mit Hilfe geeigneter Matrizen als linear-quadratisches Optimalsteuerungsproblem, und untersuchen Sie die Matrizen in der Zielfunktion auf positive Definitheit.

5) **(15 Punkte):** Bestimmen Sie mit dem Separationsansatz in Produktform die Lösung des Problems

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ u(0,t) &= 0, & u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \\ u(x,0) &= 0, & u_t(x,0) = \sin(3x). \end{aligned}$$

Nr.	Zeitfunktion $y(t)$	Transformierte $Y(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3	$\exp(-at)$	$\frac{1}{s+a}$
4	$\frac{1}{T}\exp\left(-\frac{t}{T}\right)$	$\frac{1}{1+sT}$
5	$\frac{1}{a}(1-\exp(-at))$	$\frac{1}{s(s+a)}$
6	$1-\exp(-t/T)$	$\frac{1}{s(1+sT)}$
7	$\frac{1}{b-a}(\exp(-at)-\exp(-bt))$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
8	$\frac{\exp(-t/T_1)-\exp(-t/T_2)}{T_1-T_2}$	$\frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$
9	$t\cdot\exp(-at)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
10	$\frac{1}{T^2}\cdot t\cdot\exp(-t/T)$	$\frac{1}{(1+sT)^2}$
11	$\frac{a}{b}+\frac{b-a}{b}\cdot\exp(-bt)$	$\frac{(s+a)}{s(s+b)}$
12	$1+\frac{T-T_1}{T_1}\exp(-t/T_1)$	$\frac{(1+sT)}{s(1+sT_1)}$
13	$\frac{1}{a^2}(\exp(-at)-1+a\cdot t)$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
14	$T\cdot\exp(-t/T)+t-T$	$\frac{1}{s^2(1+sT)}$
15	$\frac{1}{a^2}[1-(at+1)\exp(-at)]$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$

Tabelle 1: **Korrespondenzen zur Laplace–Transformation**

Nr.	Zeitfunktion $y(t)$	Transformierte $Y(s)$
16	$1-\dfrac{T+t}{T}\exp(-t/T)$	$\dfrac{1}{s(1+sT)^2}$
17	$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{a-b}\left[\dfrac{1}{a}\exp(-at)-\dfrac{1}{b}\exp(-bt)\right]$	$\dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}$
18	$1+\dfrac{T_1\cdot\exp(-t/T_1)-T_2\cdot\exp(-t/T_2)}{T_2-T_1}$	$\dfrac{1}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}$
19	$\dfrac{(c-b)\exp(-at)+(a-c)\exp(-bt)+(b-a)\exp(-ct)}{(a-b)(a-c)(c-b)}$	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
20	$[(T_1-T_2)(T_1-T_3)(T_2-T_3)]^{-1}\cdot$ $[T_1\,(T_2-T_3)\exp(-t/T_1)+T_2\,(T_3-T_1)\exp(-t/T_2)$ $+T_3\,(T_1-T_2)\exp(-t/T_3)]$	$\dfrac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}$
21	$\dfrac{1}{\omega}\cdot\sin(\omega t)$	$\dfrac{1}{s^2+\omega^2}$
22	$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
23	$\dfrac{1}{2\omega}\cdot t\cdot\sin(\omega t)$	$\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
24	$t\cdot\cos(\omega t)$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
25	$\sinh(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$
26	$\cosh(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$
27	$\dfrac{1}{\sqrt{1-D^2}\omega}\exp(-D\omega t)\sin(\sqrt{1-D^2}\;\omega t)$	$\dfrac{1}{s^2+2D\omega s+\omega^2}$
28	$\exp(-D\omega t)\sin(\sqrt{1-D^2}\;\omega t)$	$\dfrac{\sqrt{1-D^2}\;\omega}{s^2+2D\omega s+\omega^2}$
29	$\exp(-D\omega t)\cos(\sqrt{1-D^2}\;\omega t)$	$\dfrac{s+D\omega}{s^2+2D\omega s+\omega^2}$
30	$\exp(-\delta t)\sin(\omega_e t)$	$\dfrac{\omega_e}{(s+\delta)^2+\omega_e^2}\;,\quad \omega_e=\sqrt{\omega-\delta^2}$ $=\sqrt{1-D^2}\omega$
31	$\exp(-\delta t)\cos(\omega_e t)$	$\dfrac{s+\delta}{(s+\delta)^2+\omega_e^2}\;,\quad \omega_e=\sqrt{\omega-\delta^2}$ $=\sqrt{1-D^2}\omega$
32	$\exp(-\delta t)\sinh(\omega_e t)$	$\dfrac{\omega_e}{(s+\delta)^2-\omega_e^2}\;,\quad \omega_e=\sqrt{\delta^2-\omega^2}$
33	$\exp(-\delta t)\cosh(\omega_e t)$	$\dfrac{s+\delta}{(s+\delta)^2-\omega_e^2}\;,\quad \omega_e=\sqrt{\delta^2-\omega^2}$

Tabelle 2: **Fortsetzung**