Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik

Institut für Mathematik und Rechneranwendung

Prof. Dr. M. Gerdts, Dr. S.-J. Kimmerle, A. Huber

Wintertrimester 2018

Mathematische Methoden in den Ingenieurwissenschaften

Übung 6

Aufgabe 1) (Optimalsteuerungsproblem)

Gesucht ist eine stetige Steuerung $u : [0, 2] \to \mathbb{R}$ und ein stetig differenzierbarer Zustand $x : [0, 2] \to \mathbb{R}$, so dass

$$-x(2) + \int_0^2 \frac{1}{2}(x(t) - 4)^2 + \frac{1}{6}u^2(t)\, dt$$

minimal wird unter der Nebenbedingung

$$x'(t) = x(t) + u(t), \qquad x(0) = 0.$$

Berechnen Sie eine den notwendigen Optimalitätsbedingungen genügende Lösung.

Lösung:

In dieser Aufgabe haben wir ein Optimalsteuerungsproblem der Form: Finde eine stetige Steuerung $u : [a, b] \to \mathbb{R}^{n_u}$ und einen stetig differenzierbaren Zustand $x : [a, b] \to \mathbb{R}^{n_x}$ im festen Intervall $[a, b]$ mit $a < b$, so dass

$$F(x(t), u(t)) := g(x(b)) + \int_a^b f_0(t, x(t), u(t))\, dt$$

minimal wird unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), u(t)), \\ x(a) &= x_a. \end{aligned}$$

Zur Lösung dieser Klasse von Optimalsteuerungsproblemen benötigen wir die Hamiltonfunktion

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = f_0(t, x(t), u(t)) + \lambda(t) f(t, x(t), u(t)),$$

welche auf die notwendigen Optimalitätsbedingungen

$$\begin{aligned}
\lambda'(t) &= -\nabla_x H(t, x(t), u(t), \lambda(t)), \\
\lambda(b) &= \nabla g(x(b)), \\
0 &= \nabla_u H(t, x(t), u(t), \lambda(t))
\end{aligned}$$

führt. In unserem Fall haben wir

$$g(x(2)) = -x(2), \quad f_0(t, x, u) = \frac{1}{2}(x(t) - 4)^2 + \frac{1}{6}u^2(t), \quad \text{und} \quad f(t, x, u) = x(t) + u(t).$$

Die Hamiltonfunktion lautet

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = \frac{1}{2}(x(t) - 4)^2 + \frac{1}{6}u^2(t) + \lambda(t)(x(t) + u(t)),$$

und damit ergeben sich die notwendigen Optimalitätsbedingungen

$$\begin{aligned}
\lambda'(t) = &\quad -\nabla_x H(x(t), u(t), \lambda(t)) = -x(t) + 4 - \lambda(t), & \lambda(2) = \nabla_x g(x(2)) = -1, \\
x'(t) = &\quad x(t) + u(t), & x(0) = 0, \\
0 = &\quad \nabla_u H(x(t), u(t), \lambda(t)) = \tfrac{1}{3}u(t) + \lambda(t). &
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich mit $u(t) = -3\lambda(t)$ das inhomogene Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ \lambda'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Zur Lösung des homogenen Systems $\begin{pmatrix} x'(t) \\ \lambda'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix}$ bestimmen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix.

Eigenwerte:

$$0 = (1 - \alpha)(-1 - \alpha) - 3 = \alpha^2 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \pm 2.$$

Als zugehörige Eigenvektoren erhalten wir $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu $\alpha_1 = 2$ bzw. $\alpha_2 = -2$. Damit hat man die homogene Lösung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} = Ae^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Be^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten als Ansatz für eine partikuläre Lösung: $\begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Damit erhalten wir durch Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergeben sich die Konstanten $c_1 = 3$ und $c_2 = 1$ und somit die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} = Ae^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Be^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Randbedingungen liefert:

$$0 = x(0) = A + 3B + 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad A = -3 - 3B;$$

$$-1 = \lambda(2) = Ae^{-4} - Be^4 + 1 = (-3 - 3B)e^{-4} - Be^4 + 1.$$

Hieraus erhalten wir schließlich

$$B = \frac{2 - 3e^{-4}}{e^4 + 3e^{-4}} \qquad \text{und} \qquad A = -3 - \frac{6 - 9e^{-4}}{e^4 + 3e^{-4}} = \frac{-3e^4 - 6}{e^4 + 3e^{-4}}.$$

Damit ist die Lösung gegeben durch

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{-3e^4 - 6}{e^4 + 3e^{-4}} e^{-2t} + \frac{6 - 9e^{-4}}{e^4 + 3e^{-4}} e^{2t} + 3, \\ \lambda(t) &= \frac{-3e^4 - 6}{e^4 + 3e^{-4}} e^{-2t} - \frac{2 - 3e^{-4}}{e^4 + 3e^{-4}} e^{2t} + 1, \\ u(t) &= -3\lambda(t) = \frac{9e^4 + 18}{e^4 + 3e^{-4}} e^{-2t} + \frac{6 - 9e^{-4}}{e^4 + 3e^{-4}} e^{2t} - 3. \end{aligned}$$

Aufgabe 2) (Optimalsteuerungsproblem)

Gesucht ist eine stetige Steuerung $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ und ein zweimal stetig differenzierbarer Zustand $x : [0, T] \to \mathbb{R}$, so dass

$$-x(T) + \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t)\, dt$$

minimal wird unter der Nebenbedingung

$$x''(t) = u(t), \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 0.$$

Berechnen Sie eine den notwendigen Optimalitätsbedingungen genügende Lösung.

Lösung:

Um unsere Theorie anwenden zu können, transformieren wir zunächst auf ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}, \qquad x(0) = 0, \qquad v(0) = 0.$$

Damit erhalten wir das Problem

$$\min \quad \underbrace{-x(T)}_{=:g(x(T),v(T))} + \int_0^T \underbrace{\frac{1}{2}u^2(t)}_{=:f_0(t,x,v,u)} \, dt \quad \text{u.d.N.} \quad \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}}_{=:f(t,x,v,u)}, \quad x(0) = 0, \quad v(0) = 0.$$

mit 2 Zuständen x, v und einer Steuerung u. Die Hamiltonfunktion lautet nun

$$H(x(t), v(t), u(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)) = \frac{1}{2}u(t)^2 + \lambda(t)^\top \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \frac{1}{2}u(t)^2 + \lambda_1 v + \lambda_2 u.$$

Als notwendige Optimalitätsbedingungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda_1'(t) &= -\nabla_x H(x(t), v(t), u(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)) = 0, & \lambda_1(T) &= \nabla_x g(x(T), v(T)) = -1, \\
\lambda_2'(t) &= -\nabla_v H(x(t), v(t), u(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)) = -\lambda_1(t), & \lambda_2(T) &= \nabla_v g(x(T), v(T)) = 0, \\
x'(t) &= v(t), & x(0) &= 0, \\
v'(t) &= u(t), & v(0) &= 0, \\
0 &= \nabla_u H(x(t), v(t), u(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)) = u(t) + \lambda_2(t). & &
\end{aligned}$$

Dieses System von Differentialgleichungen ist entkoppelt und lässt sich durch sukzessive Integration lösen:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1'(t) = 0, \lambda(T) = -1 && \Rightarrow \quad \lambda_1(t) = -1; \\
&\lambda_2'(t) = -\lambda_1(t) = 1 && \Rightarrow \quad \lambda_2(t) = t + c_1; \\
&\lambda_2(T) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = -T && \Rightarrow \quad \lambda_2(t) = t - T; \\
&0 = u(t) + \lambda_2(t) && \Leftrightarrow \quad u(t) = -\lambda_2(t) = T - t; \\
&v'(t) = u(t) = T - t && \Rightarrow \quad v(t) = Tt - \tfrac{1}{2}t^2 + c_2; \\
&v(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = 0 && \Rightarrow \quad v(t) = Tt - \tfrac{1}{2}t^2; \\
&x'(t) = v(t) = Tt - \tfrac{1}{2}t^2 && \Rightarrow \quad x(t) = \tfrac{T}{2}t^2 - \tfrac{1}{6}t^3 + c_3; \\
&x(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_3 = 0 && \Rightarrow \quad x(t) = \tfrac{T}{2}t^2 - \tfrac{1}{6}t^3.
\end{aligned}$$

Damit haben wir die gesuchte Steuerung $u(T) = T - t$ und den gesuchten Zustand $x(t) = \frac{T}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3$ bestimmt.

Aufgabe 3) (Optimalsteuerungsproblem)
Gesucht ist eine stetige Steuerung $u : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ und stetig differenzierbare Zustände $x, y : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass

$$F(x,y,u) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x(t)^2 + \frac{1}{2}y(t)^2 + \frac{1}{2}u_1(t)^2 + \frac{1}{2}u_2(t)^2 \right) dt$$

minimal wird unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= u_1(t), \qquad & x(0) &= 1, \\ y'(t) &= -u_2(t), \qquad & y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Berechnen Sie eine den notwendigen Optimalitätsbedingungen genügende Lösung.

<u>Lösung:</u>

Wir könnten erkennen, dass das Problem in zwei eindimensionale (d.h. mit $n_x = n_u = 1$) Optimalsteuerungsprobleme zerfällt. Das eine in x und u_1 das andere in y und u_2. Letzteres wird trivialerweise durch die Nullfunktionen gelöst. Sehen wir dies nicht, rechnen wir 4-dimensional. Die Hamiltonfunktion lautet

$$H(x(t), y(t), u_1(t), u_2(t)) = \frac{1}{2}x(t)^2 + \frac{1}{2}y(t)^2 + \frac{1}{2}u_1(t)^2 + \frac{1}{2}u_2(t)^2 + \lambda_1(t)u_1(t) - \lambda_2(t)u_2(t).$$

Als notwendige Optimalitätsbedingungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda_1'(t) &= & -\nabla_x H(x(t), y(t), u_1(t), u_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)) = -x(t), \qquad & \lambda_1(1) = 0, \\
\lambda_2'(t) &= & -\nabla_y H(x(t), y(t), u_1(t), u_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)) = -y(t), \qquad & \lambda_2(1) = 0, \\
x'(t) &= & u_1(t), \qquad & x(0) = 1, \\
y'(t) &= & -u_2(t), \qquad & y(0) = 0, \\
0 &= & \nabla_{u_1} H(x(t), y(t), u_1(t), u_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)) = u_1(t) + \lambda_1(t), & \\
0 &= & \nabla_{u_2} H(x(t), y(t), u_1(t), u_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)) = u_2(t) - \lambda_2(t). &
\end{aligned}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen bestimmen wir

$$u_1(t) = -\lambda_1(t) \qquad \text{und} \qquad u_2(t) = \lambda_2(t).$$

Damit erhalten wir das homogene Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda_1(t) \\ y(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda_1(t) \\ y(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix}$$

Auch hier kann man erkennen, dass das Problem in zwei Teilprobleme zerfällt. Wir bestimmen die Eigenwerte $\{+1, -1, +1, -1\}$ mit zugehörigen Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda_1(t) \\ y(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix} = A_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + A_4 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Anfangswerte liefert

$$\begin{aligned} 1 &= x(0) = A_1 + A_2, \\ 0 &= \lambda_1(1) = -A_1 e + A_2 e^{-1}, \\ 0 &= y(0) = A_3 + A_4, \\ 0 &= \lambda_2(1) = -A_3 e + A_4 e^{-1}. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $A_2 = 1 - A_1$ und somit erhalten wir aus der zweiten

$$0 = -A_1 e + (1 - A_1)e^{-1} \quad \text{also} \quad A_1 = \frac{e^{-1}}{e + e^{-1}} = \frac{1}{1 + e^2}.$$

Damit folgt

$$A_2 = 1 - A_1 = 1 - \frac{1}{1 + e^2} = \frac{e^2}{1 + e^2}.$$

Aus der dritten Gleichung folgt $A_3 = -A_4$ und somit aus der vierten Gleichung $A_3 = 0 = A_4$. Somit haben wir die Lösung

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{1+e^2}e^t + \frac{e^2}{1+e^2}e^{-t} \left(= \frac{e^{-1}\cosh(t) + \sinh(1)e^{-t}}{\cosh(1)}\right), \\
\lambda_1(t) &= -\frac{1}{1+e^2}e^t + \frac{e^2}{1+e^2}e^{-t}, \\
u_1(t) &= -\lambda_1(t) = \frac{1}{1+e^2}e^t - \frac{e^2}{1+e^2}e^{-t}, \\
y(t) &= 0, \\
\lambda_2(t) &= 0, \\
u_2(t) &= -\lambda_2(t) = 0.
\end{aligned}$$

Bearbeitung der Aufgaben zuhause, Besprechung Do, 15.02.2018 bzw. Mo, 19.02.2018 in der jeweiligen Übung.