

# Mathematische Methoden in den Ingenieurwissenschaften

## Übung 5

### Aufgabe 1) (Raketenflug)

Für eine senkrecht aufsteigende Rakete mit zeitabhängiger Masse  $m$  und Schubkraft  $T = c\beta$  gelten (bei Vernachlässigung des Luftwiderstands) die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{h}(t) &= v(t), \\ \dot{v}(t) &= \frac{c}{m(t)}\beta - g, \\ \dot{m}(t) &= -\beta,\end{aligned}$$

wobei  $h$  die Höhe,  $v$  die Geschwindigkeit,  $\beta$  den konstanten Treibstoffdurchsatz des Triebwerks,  $g$  die Erdbeschleunigung und  $c$  eine Proportionalitätskonstante bezeichnen.

- (a) Bestimmen Sie die Lösung der Bewegungsgleichungen zu den Anfangswerten  $h(0) = 0$ ,  $v(0) = 0$ ,  $m(0) = m_0 > 0$ .
- (b) Berechnen Sie  $\beta$ , so dass die Höhe  $h(t_f)$  zum Zeitpunkt  $t_f > 0$  maximal wird. Der Zeitpunkt  $t_f$  sei dabei festgelegt durch die Forderung, dass

$$m_0 - m(t_f) = \Delta m$$

für eine vorgegebene Treibstoffmenge  $\Delta m > 0$  gilt.

### Aufgabe 2) (Differenzenverfahren)

Gegen Sei die Randwertaufgabe

$$x''(t) = 4x(t), \quad x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b.$$

- a) Formulieren Sie das aus dem Differenzenverfahren resultierende lineare Gleichungssystem für eine Diskretisierung in  $N$  Intervalle.
- b) Geben Sie das Gleichungssystem für  $N = 2$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x(1) = 2$  explizit an.
- c) Schreiben Sie ein Programm zur Lösung des linearen Gleichungssystems in beliebiger Dimension.

**Aufgabe 3)** (Finite-Element-Methode)

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned}
 -u''(t) &= f(t), \quad t \in (a, b), \\
 u(a) = u(b) &= 0.
 \end{aligned}$$

Die Idee der Finite-Element-Methode besteht darin, das Randwertproblem in ein Variationsproblem zu überführen. Dazu wird die Differentialgleichung mit einer Funktion  $v$  aus einem geeigneten Funktionenraum mit  $v(a) = v(b) = 0$  multipliziert und integriert:

$$- \int_a^b u''(t)v(t) dt = \int_a^b f(t)v(t) dt.$$

Partielle Integration des linken Integrals führt auf die Variationsgleichung

$$\int_a^b u'(t)v'(t) dt = \int_a^b f(t)v(t) dt, \tag{I}$$

die für alle (geeigneten) Funktionen  $v$  mit  $v(a) = v(b) = 0$  erfüllt sein muss.

Zur numerischen Approximation dieser Gleichung wird das Intervall  $[a, b]$  äquidistant mittels  $t_i = a + ih$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $h = (b - a)/N$  unterteilt. Unter Verwendung stückweise linearer Basisfunktionen  $\psi_i$ ,  $i = 0, \dots, N$  des Splineraums  $S_N([a, b], \mathbb{R})$  hat die gesuchte approximative Lösung die Form

$$u_N(t) = \sum_{i=0}^N c_i \psi_i(t).$$

Vorüberlegung zu den Randwerten:

$$\begin{aligned}
 u_N(a) &= c_0 \psi_0(a) = c_0 = 0 \\
 u_N(b) &= c_N \psi_N(b) = c_N = 0
 \end{aligned}$$

Daher genügt für die vorliegenden Randwerte lediglich die Betrachtung der Summe

$$u_N(t) = \sum_{i=1}^{N-1} c_i \psi_i(t).$$

Wählt man nun als Testfunktionen die  $N - 1$  Basisfunktionen  $v_i(t) = \psi_i(t)$ , erhält man aus (I) folgende Gleichungen:

$$\int_a^b u'_N(t) \psi'_i(t) dt = \int_a^b f(t) \psi_i(t) dt, \quad i = 1, \dots, N - 1. \quad (\text{II})$$

Formulieren Sie das aus (II) resultierende lineare Gleichungssystem und lösen Sie es für den Spezialfall  $N = 10$ ,  $f(t) = 1$  und  $[a, b] = [0, 1]$ .

---

**Bearbeitung der Aufgaben zuhause, Besprechung Do, 08.02.2018 bzw. Mo, 12.02.2018 in der jeweiligen Übung.**