Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. M. Gerdts, Dr. S.-J. Kimmerle, A. Huber

Wintertrimester 2018

Mathematische Methoden in den Ingenieurwissenschaften

Übung 5

Aufgabe 1) (Raketenflug)

Für eine senkrecht aufsteigende Rakete mit zeitabhängiger Masse m und Schubkraft $T = c\beta$ gelten (bei Vernachlässigung des Luftwiderstands) die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\dot{h}(t) &= v(t),\\
\dot{v}(t) &= \frac{c}{m(t)}\beta - g,\\
\dot{m}(t) &= -\beta,
\end{aligned}$$

wobei h die Höhe, v die Geschwindigkeit, β den konstanten Treibstoffdurchsatz des Triebwerks, g die Erdbeschleunigung und c eine Proportionalitätskonstante bezeichnen.

(a) Bestimmen Sie die Lösung der Bewegungsgleichungen zu den Anfangswerten $h(0) = 0$, $v(0) = 0$, $m(0) = m_0 > 0$.

(b) Berechnen Sie β, so dass die Höhe $h(t_f)$ zum Zeitpunkt $t_f > 0$ maximal wird. Der Zeitpunkt t_f sei dabei festgelegt durch die Forderung, dass

$$m_0 - m(t_f) = \Delta m$$

für eine vorgegebene Treibstoffmenge $\Delta m > 0$ gilt.

Aufgabe 2) (Differenzenverfahren)

Gegen Sei die Randwertaufgabe

$$x''(t) = 4x(t), \quad x(a) = x_a,\ x(b) = x_b.$$

a) Formulieren Sie das aus dem Differenzenverfahren resultierende lineare Gleichungssystem für eine Diskretisierung in N Intervalle.

b) Geben Sie das Gleichungssystem für $N = 2,\ x(0) = 1,\ x(1) = 2$ explizit an.

c) Schreiben Sie ein Programm zur Lösung des linearen Gleichungssystems in beliebiger Dimension.

Aufgabe 3) (Finite-Element-Methode)

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(t) &= f(t), \quad t \in (a,b), \\ u(a) = u(b) &= 0. \end{aligned}$$

Die Idee der Finite-Element-Methode besteht darin, das Randwertproblem in ein Variationsproblem zu überführen. Dazu wird die Differentialgleichung mit einer Funktion v aus einem geeigneten Funktionenraum mit $v(a) = v(b) = 0$ multipliziert und integriert:

$$-\int_a^b u''(t)v(t)\,dt = \int_a^b f(t)v(t)\,dt.$$

Partielle Integration des linken Integrals führt auf die Variationsgleichung

$$\int_a^b u'(t)v'(t)\,dt = \int_a^b f(t)v(t)\,dt, \tag{I}$$

die für alle (geeigneten) Funktionen v mit $v(a) = v(b) = 0$ erfüllt sein muss.

Zur numerischen Approximation dieser Gleichung wird das Intervall $[a,b]$ äquidistant mittels $t_i = a + ih,\ i = 0,\ldots,N,\ h = (b-a)/N$ unterteilt. Unter Verwendung stückweise linearer Basisfunktionen $\psi_i, i = 0,\ldots,N$ des Splineraums $S_N([a,b],\mathbb{R})$ hat die gesuchte approximative Lösung die Form

$$u_N(t) = \sum_{i=0}^{N} c_i \psi_i(t).$$

Vorüberlegung zu den Randwerten:

$$u_N(a) = c_0\psi_0(a) = c_0 = 0$$
$$u_N(b) = c_N\psi_N(b) = c_N = 0$$

Daher genügt für die vorliegenden Randwerte lediglich die Betrachtung der Summe

$$u_N(t) = \sum_{i=1}^{N-1} c_i \psi_i(t).$$

Wählt man nun als Testfunktionen die $N-1$ Basisfunktionen $v_i(t) = \psi_i(t)$, erhält man aus (I) folgende Gleichungen:

$$\int_a^b u_N'(t)\psi_i'(t)\,dt = \int_a^b f(t)\psi_i(t)\,dt, \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{II}$$

Formulieren Sie das aus (II) resultierende lineare Gleichungssystem und lösen Sie es für den Spezialfall $N = 10$, $f(t) = 1$ und $[a, b] = [0, 1]$.

Bearbeitung der Aufgaben zuhause, Besprechung Do, 08.02.2018 bzw. Mo, 12.02.2018 in der jeweiligen Übung.