Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Lineare und nichtlineare Optimierung
Dr. habil. S.-J. Kimmerle

4. Übung

Herbsttrimester 2023

14) Lösen Sie die folgenden linearen Programme graphisch. Bringen Sie diese auf primale Normalform.

$$\begin{aligned} \min x_1 + x_2 &\quad \text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 \geq 3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ \max x_1 + x_2 &\quad \text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 \geq 3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ \max x_1 + x_2 &\quad \text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 \geq 3, x_1 - 2x_2 \geq -1, 2x_1 - x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

15) Lösen Sie das folgende lineare Programm mit Hilfe des Simplexverfahrens:

$$\begin{aligned} \min -250x_1 - 45x_2 \quad \text{u.d.N.} \quad & x_1 + 0.2x_2 \leq 72, 150x_1 + 25x_2 \leq 10000, \\ & x_1 \in [0, 50], x_2 \in [0, 200]. \end{aligned}$$

16) Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Minimiere} & -3x_1 - 4x_2 & & \\ \text{u.d.N.} & 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 8, \\ & 4x_1 + x_2 + x_4 & = & 10, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0. \end{array}$$

Bestimmen Sie alle zulässigen Basislösungen (Ecken) und die optimale(n) Lösung(en) des Problems. Die zulässigen Basislösungen sollen berechnet und nicht durch graphische Betrachtungen bestimmt werden.

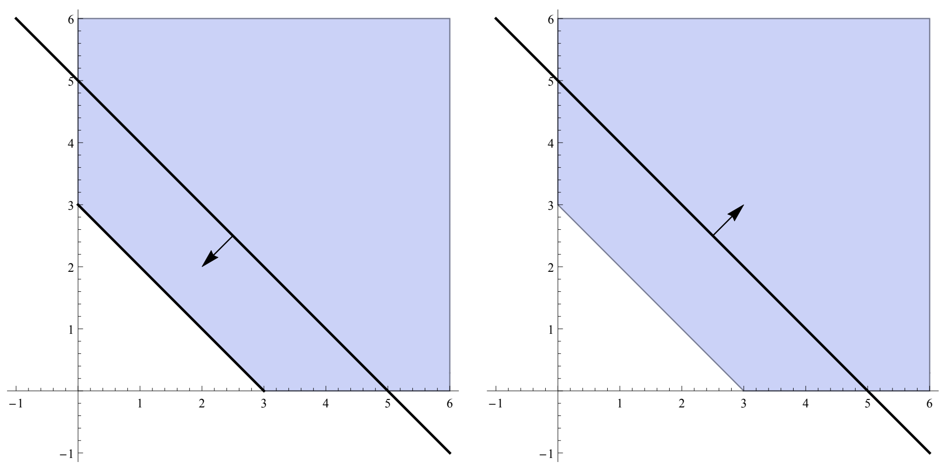
Lösungen

14) Das erste Problem hat die Lösungsmenge $\{(\lambda, 3-\lambda) \mid 0 \le \lambda \le 3\}$ und die Normalform

$$\begin{aligned} \min x_1 + x_2 \quad &\text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 \ge 3, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ \Leftrightarrow \min x_1 + x_2 \quad &\text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 - x_3 = 3, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \\ \Leftrightarrow \min(1,1,0)x \quad &\text{u.d.N.} \quad (1,1,-1)x = 3, x \ge 0. \end{aligned}$$

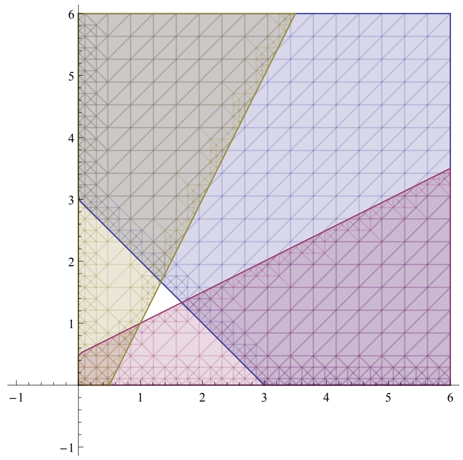
Das zweite Problem ist unbeschränkt, d. h. es hat keine Lösung. Die Normalform lautet

$$\begin{aligned} \max x_1 + x_2 \quad &\text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 \ge 3, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ \Leftrightarrow \min -x_1 - x_2 \quad &\text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 - x_3 = 3, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \\ \Leftrightarrow \min(-1,-1,0)x \quad &\text{u.d.N.} \quad (1,1,-1)x = 3, x \ge 0. \end{aligned}$$



Das dritte Problem hat keinen zulässigen Punkt, d. h. es hat keine Lösung. Die Normalform ist

$$\begin{aligned} \max x_1 + x_2 \quad &\text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 \ge 3, x_1 - 2x_2 \ge -1, 2x_1 - x_2 \le 1, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ \Leftrightarrow \min -x_1 - x_2 \quad &\text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 - x_3 = 3, x_1 - 2x_2 - x_4 = -1, 2x_1 - x_2 + x_5 = 1, \\ &\phantom{\text{u.d.N.} \quad} x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0. \\ \Leftrightarrow \min(-1,-1,0,0,0)x \quad &\text{u.d.N.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \ge 0. \end{aligned}$$



15) Zunächst bestimmt man die primale Normalform

$$\min(-250,-45,0,0,0,0)x \quad \text{u.d.N.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 150 & 25 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 200 \\ 72 \\ 10000 \end{pmatrix}, x \geq 0.$$

Hier erkennt man die zulässige Basislösung $(0,0,50,200,72,10000)^\top$ mit der Basisindexmenge $B=\{3,4,5,6\}$. Somit ergibt sich das folgende Starttableau für das Simplexverfahren:

	x_N		
x_B	$\Gamma_B^N=(A_B)^{-1}A_N$	$\beta_B=(A_B)^{-1}b$	$\frac{x_B}{\Gamma_B^q}$
	$\zeta_N^\top = c_B^\top \Gamma_B^N - c_N^\top$	$c_B^\top x_B$	

$\Rightarrow$

	x_1	x_2		
x_3	$\boxed{1}$	0	50	50
x_4	0	1	200	–
x_5	1	2/10	72	72
x_6	150	25	10000	10000/150
	250	45	0	

Das Tableau ist nicht optimal, da $250>0$. Wir wählen den Nichtbasisindex $q=1$. Aus der rechten Spalte ergibt sich die Pivotzeile $p=3$. Damit ist die neue Basis $B=\{1,4,5,6\}$, es ist $\gamma_{pq}=1$. Das neue Tableau ergibt sich aus den Update-Formeln:

	$x_j, j \in N \setminus \{q\}$	x_p	
$x_i, i \in B \setminus \{p\}$	$\gamma_{ij} - \frac{\gamma_{iq}\gamma_{pj}}{\gamma_{pq}}$	$-\frac{\gamma_{iq}}{\gamma_{pq}}$	$\beta_i - \frac{\gamma_{iq}\beta_p}{\gamma_{pq}}$
x_q	$\frac{\gamma_{pj}}{\gamma_{pq}}$	$\frac{1}{\gamma_{pq}}$	$\frac{\beta_p}{\gamma_{pq}}$
	$\zeta_j - \frac{\zeta_q\gamma_{pj}}{\gamma_{pq}}$	$-\frac{\zeta_q}{\gamma_{pq}}$	$d - \frac{\zeta_q\beta_p}{\gamma_{pq}}$

$\Rightarrow$

	x_3	x_2		
x_1	1	0	50	–
x_4	0	1	200	200
x_5	-1	2/10	22	110
x_6	-150	$\boxed{25}$	2500	100
	-250	45	-12500	

Wegen $45>0$ ist das Tableau nicht optimal, man erhält $q=2$ und $p=6$ und damit die neue Basis $B=\{1,4,5,2\}$. Mit den Update-Formeln erhalten wir das Tableau:

	x_3	x_6		
x_1	1	0	50	50
x_4	6	-1/25	100	100/6
x_5	$\boxed{0.2}$	-8/1000	2	10
x_2	-6	1/25	100	–
	20	-1.8	-17000	

Wiederum ist die Lösung nicht optimal, da $20 > 0$. Mit $q = 3$ und $p = 5$ erhalten wir $B = \{1, 4, 3, 2\}$ und das Tableau

	x_5	x_6	
x_1	-5	1/25	40
x_4	-30	2/10	40
x_3	5	-1/25	10
x_2	30	-2/10	160
	-100	-1	-17200

Dieses ist optimal und wir erhalten die Lösung $\hat{x} = (40, 160, 10, 40, 0, 0)^\top$ mit dem Optimalwert $c^\top \hat{x} = -17200$.

16) Das lineare Optimierungsproblem ist in Standardform gegeben mit den Daten

$$c = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laut Definition einer zulässigen Basislösung sind die zu positiven Komponenten $x_i > 0$ von x gehörenden Spaltenvektoren von A linear unabhängig. Es müssen also alle möglichen Basismatrizen und die zugehörigen Basislösungen bestimmt werden.

Es gibt insgesamt sechs Kombinationen von jeweils zwei linear unabhängigen Spalten von A, die als Basismatrizen in Frage kommen. Die zugehörige Basislösung ist durch das lineare Gleichungssystem $A_B x_B = b$ und $x_N = 0$ gegeben. Es muss jeweils die Zulässigkeit $x_B \geq 0$ überprüft werden.

(i) $B = \{1, 2\}$, $N = \{3, 4\}$, $x_3 = x_4 = 0$,

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Wegen $x_B \geq 0$ ist die Basislösung zulässig. Der zugehörige Zielfunktionswert beträgt $c^\top x = -27$.

(ii) $B = \{1, 3\}$, $N = \{2, 4\}$:

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wegen $x_B \geq 0$ ist die Basislösung zulässig. Der zugehörige Zielfunktionswert beträgt $c^\top x = -7.5$.

(iii) $B = \{1, 4\}$, $N = \{2, 3\}$:

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Wegen $x_4 < 0$ ist die Basislösung nicht zulässig. Der zugehörige Zielfunktionswert beträgt $c^\top x = -12$.

(iv) $B = \{2, 3\}$, $N = \{1, 4\}$:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wegen $x_3 < 0$ ist die Basislösung nicht zulässig. Der zugehörige Zielfunktionswert beträgt $c^\top x = -40$.

(v) $B = \{2, 4\}$, $N = \{1, 3\}$:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wegen $x_B \geq 0$ ist die Basislösung zulässig. Der zugehörige Zielfunktionswert beträgt $c^\top x = -32$.

(vi) $B = \{3, 4\}$, $N = \{1, 2\}$:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Wegen $x_B \geq 0$ ist die Basislösung zulässig. Der zugehörige Zielfunktionswert beträgt $c^\top x = 0$.

Die optimale Lösung wird in (v) angenommen.