

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

*der Bundeswehr*  
**Universität**  **München**

## Lineare und nichtlineare Optimierung

**Priv.-Doz. Dr. Sven-Joachim Kimmerle**

Vorlesung Herbsttrimester 2020  
Bachelor Luft- und Raumfahrttechnik

- 1 Einführung
  - Dozent
  - Thema der Lehrveranstaltung
  - Organisatorisches
  - Einleitung
- 2 Unrestringierte Optimierung
- 3 Wichtige Verfahren der numerischen Optimierung
- 4 Restringierte Optimierung
- 5 Zusammenfassung - Ausblick und Wiederholung

## Einführung

Dozent  
Thema der  
Lehrveranstaltung  
Organisatorisches  
Einleitung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

- 2000: Vordiplom in Mathematik & Vordiplom in Physik (U Heidelberg)
- 2002: Maîtrise in Mathematik (U Paris 7, Frankreich)
- 2004: Diplom in Mathematik (U Heidelberg)
- 2004-2009: Forschungszentrum MATHEON, Berlin
- 2009: Promotion in Mathematik (HU Berlin)
- 2010: Toyota/U Ottawa, Ottawa, Kanada
- 2011-2018: Postdoc & Vertretungsprofessor, UniBw München, Neubiberg
- 2019: Habilitation in Mathematik (UniBw München, Neubiberg)
- Seit 2018: Physical Software Solutions GmbH, Münsing & Ottobrunn

Externer Lehrbeauftragter an verschiedenen Hochschulen

Einführung

Dozent

Thema der  
Lehrveranstaltung  
Organisatorisches  
Einleitung

Unrestringierte  
Optimierung

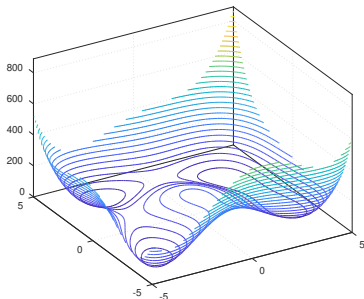
Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

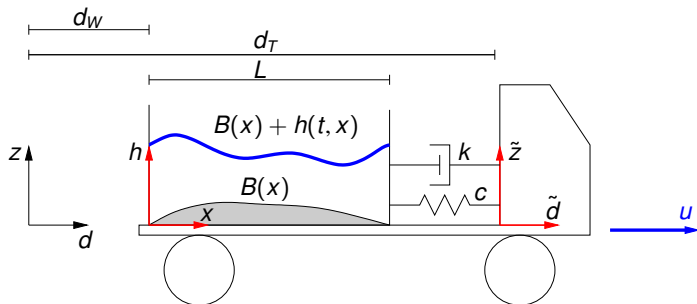
# Was ist Optimierung?

- Ein konkretes Problem, das sich mathematisch formulieren lässt, habe mehrere Lösungen (vielleicht sogar unendlich viele). Welche Lösung ist die beste d.h. optimale?
- Idee: Betrachte Zielfunktion, diese wird unter Nebenbedingungen extremal



# Beispiel: Ein Optimalsteuerungsproblem [K., Gerdts 2015 -]

LKW mit Flüssigkeitscontainer: horizontale Steuerung (Kraft)  $u$ ,  
Parameter Fahrzeug  $T$



$m_T$ : Masse LKW,  $m_W$ : Masse Flüssigkeitscontainer,  $d_T$ : Wegstrecke LKW,  $d_W$ : Wegstrecke Container,  
 $B(x)$ : Bodenprofil Container,  $h(t, x)$ : Flüssigkeitsspiegel relativ zum Bodenprofil zur Zeit  $t$  an der Position  
 $x$ ,  $v(t, x)$ : horizontale Flüssigkeitgeschwindigkeit zur Zeit  $t$  an der Position  $x$ ,  $L$ : Länge des Containers,  
 $c$ : Federkonstante,  $k$ : Dämpfungskonstante

Einführung

Dozent

Thema der  
Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

## Optimalsteuerungsproblem

Minimiere als Zielfunktion  $\mathcal{J}$  eine Linearkombination von

- Fahrzeit  $T$  ( $\rightsquigarrow$  Gewicht  $\alpha_0$ );
- Abweichung zu einem gewünschten, z.B. konstanten Flüssigkeitsspiegel  $\|h - h_d\|_{L^2(Q)}^2$  ( $\rightsquigarrow$  Gewicht  $\alpha_1$ );<sup>a</sup>
- Aufwand (“Kosten”) der Steuerung  $\|u\|_{L^2([0,T])}^2$  ( $\rightsquigarrow$  Gewicht  $\alpha_2$ );
- Abweichung zu Endpositionen  $\|d_T(T) - d_T^T\|^2 + \|d_W(T) - d_W^T\|^2$  und -geschwindigkeiten  $\|d_T'(T) - (d_T')^T\|^2 + \|d_W'(T) - (d_W')^T\|^2$  ( $\rightsquigarrow$  Gewichte  $\alpha_3, \alpha_4$ )

unter den Nebenbedingungen

- gekoppelte gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen (ODE & PDE) gelten mit Anfangs- und Randbedingungen
- Steuerbeschränkungen  
 $u(t) \in \mathcal{U} := [u_{min}, u_{max}]$ ,  $U_{ad} = \{u \in L^2(0, T) \mid u(t) \in \mathcal{U}\}$ .
- Zustandsbeschränkungen ( $0 < \underline{h} \leq h \leq \bar{h}$ )

<sup>a</sup> $L^2$  ist ein Funktionenraum, Details spielen hier keine Rolle.

Einführung

Dozent

Thema der  
Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

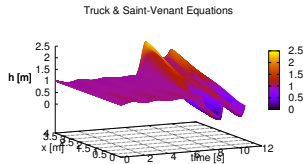
Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

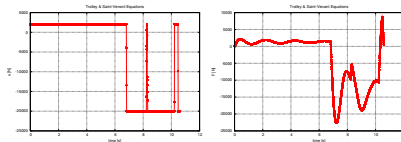
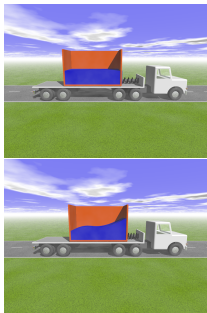
# Numerische Optimalsteuerung: Nur Fahrzeit in der Zielfunktion [Gerds/K. 2015]

Ziel: Optimales Bremsen

- bei kürzester Fahrzeit (Notbremsung)



Resultat:  $T = 10.6$  s,  $\epsilon = 0.453$ , Steuerung  $u$  (links), Feder-Dämpfer-Kraft (rechts)



$(\alpha_0 = 0.1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_{4a} = 0, \alpha_{4b} = 100, d_T(T) = 100, d_W(T) = 95, d'_T(0) = 10, d'_W(0) = 10, N = 1500, M = 50, L = 4, m_T = 2000, m_W = 4000, h_0 = 1, c = 40000, k = 10000, g = 9.81, u_{min} = -20000, u_{max} = 2000)$

Einführung

Dozent

Thema der Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Unrestringierte Optimierung

Wichtige Verfahren der numerischen Optimierung

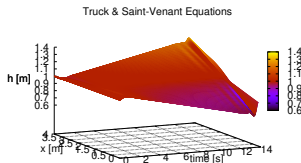
Restringierte Optimierung

Zusammenfassung - Ausblick und Wiederholung

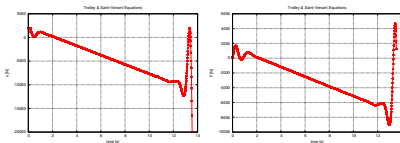
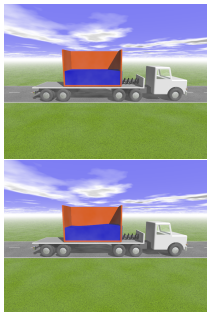
# Numerische Optimalsteuerung: Kompromiss in der Zielfunktion [Gerdt/K. 2015]

Ziel: Optimales Bremsen

- bei kürzester Fahrzeit,
- mit minimalem Steueraufwand und
- mit minimaler "Aufschaukelung"



Resultat:  $T = 13.8$  s,  $\epsilon = 0.644$ , Steuerung  $u$  (links), Feder-Dämpfer-Kraft (rechts)



( $\alpha_0 = 0.1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0.001$ ,  $\alpha_3 = 0$ ,  $\alpha_{4a} = 0$ ,  $\alpha_{4b} = 100$ ,  $d_T(T) = 100$ ,  $d_W(T) = 95$ ,  $d_T'(0) = 10 = d_W'(0)$ ,  $N = 1000$ ,  $M = 30$ ,  $L = 4$ ,  $m_T = 2000$ ,  $m_W = 4000$ ,  $h_0 = 1$ ,  $c = 40000$ ,  $k = 10000$ ,  $g = 9.81$ ,  $u_{min} = -20000$ ,  $u_{max} = 2000$ )

Einführung

Dozent

Thema der Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Unrestringierte Optimierung

Wichtige Verfahren der numerischen Optimierung

Restringierte Optimierung

Zusammenfassung - Ausblick und Wiederholung



- Optimierungsaufgaben finden sich:
  - in den Wirtschaftswissenschaften
  - im Management
  - in der Technik
  - in der Produktion
  - in der Bildverarbeitung
  - in den Naturwissenschaften
  - in der Datenanalyse
  - etc.
- Optimierung steht in engem Zusammenhang zur (mathematischen) Modellierung

- Beispiele in den Anwendungsbereichen:
  - Minimierung von Herstellungskosten
  - Minimierung von Transportkosten
  - Ausgleichsrechnung, Approximation
  - Optimalsteuerung
  - Parameteridentifikation, z.B. in Differentialgleichungen
  - etc.

Einführung

Dozent

Thema der  
Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

## Vermittlung von Grundlagen aus dem Gebiet der linearen und nichtlinearen Optimierung:

- Überblick über verschiedene Arten von Optimierungsproblemen
- Kennenlernen grundlegender Methoden der Optimierung
- Verständnis der Theorie, die dahinter steckt
- Analyse und Implementierung von Algorithmen
- Praktisches Lösen von Optimierungsproblemen aus verschiedenen Anwendungsgebieten

Einführung

Dozent

Thema der  
Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

- 2-stündige Vorlesung mit 1-stündiger Übung  
Mo, 15:00-16:30 in 033-1401 und 14tägig **Mi,**  
**08:00-09:30 in 033/0331 ?**  
als hybrides Lehrangebot
- Webseite (Folien, Übungsblätter & anderes Material):  
[www.unibw.de/ingmathe/teaching/linearenichtlineareoptimierung](http://www.unibw.de/ingmathe/teaching/linearenichtlineareoptimierung)
- **Virtuell:** [bbb.unibw.de/sve-7ou-yxf-z2u](http://bbb.unibw.de/sve-7ou-yxf-z2u)  
(Big Blue Button), Zugangsschlüssel: 794649
- Sprechzeiten & Kontakt
  - Nach der Vorlesung bzw. flexibel nach Vereinbarung
  - Email: [sven-joachim.kimmerle@unibw.de](mailto:sven-joachim.kimmerle@unibw.de)

Einführung

Dozent

Thema der

Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

## ● Prüfungsform

- Mündliche Prüfung am Ende des Trimester (unter Vorbehalt in Präsenzform)
- Bitte achten Sie grundsätzlich auch auf Ankündigungen des Prüfungsamts!
- Prüfungsrelevant ist insbesondere der in der Vorlesung behandelte und in den Übungen vertiefte Stoff.

Einführung

Dozent  
Thema der  
Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Laut Modulhandbuch sind für 3 ECTS Punkte etwa folgende Aufwände von Ihnen zu erwarten:

- 36 Stunden Anwesenheit (24 Stunden Vorlesung, 12 Stunden Übung)
- 18 Stunden Vor- und Nachbereitung der Übung sowie Übungsaufgaben
- 36 Stunden Nachbereitung der Vorlesung und Prüfungsvorbereitung

Insgesamt also 90 Stunden Workload

Einführung

Dozent  
Thema der  
Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

## Voraussetzungen:

- Höhere Mathematik I–III
- Programmierkenntnisse in einer beliebigen prozeduralen Programmiersprache (z.B. MATLAB) wünschenswert

## Verwendbarkeit:

- Anwendungen des erlangten Wissens in allen Studienschwerpunkten

Einführung

Dozent

Thema der  
Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung






Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

# Empfohlene Literatur

-  **Alt, W.: *Nichtlineare Optimierung*. Vieweg, 2002. ← !**
-  Geiger, C. und Kanzow, C.: *Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben*. Springer, 1999.
-  Geiger, C. und Kanzow, C.: *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Springer, 2002.
-  Nocedal, J. und Wright, S.: *Numerical Optimization*. Springer, 2. Aufl., 2006.
-  Gerdts, M.: *Einführung in die lineare und nichtlineare Optimierung*, Vorlesungsskript, BSc.-Studiengang “Luft- und Raumfahrttechnik”, Universität der Bundeswehr München, 2016.

Weitere Quellen folgen im Lauf der Lehrveranstaltung.



Im Praktikum verwenden wir Matlab und dabei auch die *Optimization Toolbox*.

Installation von Matlab:

- Download der Matlab-Studentenversion (kostenlos für UniBw M-Studierende) beim RZ
- Kostenlose Alternative: Scilab  
<http://www.scilab.org/products/scilab/download>

Einführung

Dozent

Thema der

Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Alle im Rahmen dieser Vorlesung zur Verfügung gestellten Materialien wurden von mir mit einem Passwort geschützt, das nur den Hörern dieser Veranstaltung bekannt gegeben wurde. Jegliche Form der Weitergabe ist untersagt!

Sven-Joachim Kimmerle

Einführung

Dozent

Thema der

Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

- Idee: Zielfunktion wird unter Nebenbedingungen extremal
- Ohne Einschränkung betrachten wir **nur Minimierungsprobleme**

Durch Multiplikation der Zielfunktion mit  $-1$  wird ein Maximierungsproblem in ein äquivalentes Minimierungsproblem transformiert

Einführung

Dozent

Thema der

Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Motivation

Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

## Problem (Allgemeines Optimierungsproblem (OP))

Minimiere  $f(x)$  unter den Nebenbedingungen  $x \in X$ .

Dabei sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  eine nichtleere Menge und  
 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

$f$  heißt **Zielfunktion**.

$x$  heißt **zulässig** für (OP), falls  $x \in X$ .

$X$  heißt **zulässige Menge** von (OP).

Einführung

Dozent

Thema der

Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Motivation

Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Bei einem **unrestringierten Optimierungsproblem (UOP)** gilt  $X = \mathbb{R}^n$ .

Oft sind die Restriktionen durch (Un-)Gleichungen gegeben:

## Problem (Standard-Optimierungsproblem (SOP))

*Minimiere  $f(x)$  unter den Nebenbedingungen (u. d. N.)*

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p.$$

*Dabei seien  $x \in \mathbb{R}^n$  und die Funktionen*

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$g = (g_1, \dots, g_m)^\top : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ und}$$

$$h = (h_1, \dots, h_p)^\top : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Einführung

Dozent

Thema der

Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Motivation

Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der LehrveranstaltungUnrestringierte  
OptimierungWichtige Verfahren  
der numerischen  
OptimierungRestringierte  
OptimierungZusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Bei einem **unrestringierten Optimierungsproblem (UOP)** gilt  $X = \mathbb{R}^n$ .

Oft sind die Restriktionen durch (Un-)Gleichungen gegeben:

## Problem (Standard-Optimierungsproblem (SOP))

*Minimiere  $f(x)$  unter den Nebenbedingungen (u. d. N.)*

$$g(x) \leq 0,$$

$$h(x) = 0.$$

*Dabei seien  $x \in \mathbb{R}^n$  und die Funktionen*

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$g = (g_1, \dots, g_m)^\top : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ und}$$

$$h = (h_1, \dots, h_p)^\top : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Einführung

Dozent  
Thema der  
Lehrveranstaltung  
Organisatorisches

Einleitung

Motivation  
Beispiele  
Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Wichtiger Spezialfall:

Problem (Lineares Optimierungsproblem (LOP) (in primaler Normalform))

Minimiere  $c^T x$  u. d. N.

$$\begin{aligned}x &\geq 0, \\ Ax &= b.\end{aligned}$$

Dabei seien:

$$x, c \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^p \quad \text{und} \quad A \in \mathbb{R}^{p \times n}.$$

Ergibt sich aus (SOP) für

$$f(x) = c^T x, \quad g(x) = -x, \quad h(x) = Ax - b.$$

Einführung

Dozent  
Thema der  
Lehrveranstaltung  
Organisatorisches

Einleitung

Motivation  
Beispiele  
Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Falls im Optimierungsproblem die Zielfunktion quadratisch ist, z.B.

$$f(x) = \frac{1}{2}(x - x_{soll})^2$$

und ansonsten die Situation von (LOP) vorliegt, dann ist dies ein **(linear-)quadratisches Optimierungsproblem (QOP)**.

Einführung

Dozent

Thema der

Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Motivation

Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung



Es gibt weitere Klassen von Optimierungsproblemen (OP):

- Vektoroptimierungsprobleme
- unendlichdimensionale OP
- semi-infinite OP
- ganzzahlige (diskrete) OP
- gemischt-ganzzahlige OP
- nicht-differenzierbare OP
- stochastische OP
- ...

Diese betrachten wir hier nicht näher.

Einführung

Dozent

Thema der

Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Motivation

Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

## Definition (Minima)

- $\hat{x} \in X$  heißt **globales Minimum** von (OP), falls

$$f(\hat{x}) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in X. \quad (4.1)$$

- $\hat{x} \in X$  heißt **striktes globales Minimum** von (OP), falls in (4.1) “ $<$ ” für alle  $x \in X$  mit Ausnahme von  $x = \hat{x}$  gilt.

- $\hat{x} \in X$  heißt **lokales Minimum** von (OP), falls es für ein  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung

$$U_\varepsilon(\hat{x}) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \hat{x}\| < \varepsilon\}$$

gibt mit

$$f(\hat{x}) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in X \cap U_\varepsilon(\hat{x}). \quad (4.2)$$

- $\hat{x} \in X$  heißt **striktes globales Minimum** von (OP), falls in (4.2) “ $<$ ” für alle  $x \in X \cap U_\varepsilon(\hat{x})$  mit Ausnahme von  $x = \hat{x}$  gilt.

Analog werden die entsprechenden Maxima definiert.

Einführung

Dozent  
Thema der  
Lehrveranstaltung  
Organisatorisches

Einleitung

Motivation  
Beispiele  
Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

- i) Existenz zulässiger Lösungen?
  - ii) Existenz von Optimallösungen?
  - iii) Eindeutigkeit der Optimallösung?
  - iv) Abhängigkeit der Optimallösungen von Problem Daten?
  - v) Welche Eigenschaften besitzen Optimallösungen, d.h. welche Bedingungen sind notwendig?
  - vi) Welche Bedingungen sind hinreichend dafür, dass eine zulässige Lösung eine Optimallösung ist?
  - vii) Welche Bedingungen sind gleichzeitig notwendig und hinreichend?
  - viii) Wie gewinnt man Schranken für den Optimalwert bzw. Fehlerabschätzungen für die Optimallösung?
  - ix) Welche Algorithmen gibt es zur Berechnung einer Optimallösung?
  - x) Welche numerische Eigenschaften haben diese?
- i) - vii) sind eher theoretischer Natur, aber ohne diese Fragestellungen ist die Beantwortung der numerischen Aspekte viii) - x), um die es in diesem Modul gehen soll, nicht möglich.

In dieser Vorlesung setzen wir die Existenz von Optimallösungen stets voraus.

Es gilt nämlich:

## Theorem (Satz von Weierstraß)

*Sei  $X \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt (d.h. abgeschlossen und beschränkt) und*

*$f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.*

*Dann nimmt  $f$  das Minimum (bzw. Maximum) auf  $X$  an.*

Einführung

Dozent

Thema der

Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Motivation

Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

# Beispiele: Minimierung mithilfe graphischer Darstellung

## Beispiel (Funktion von Himmelblau)

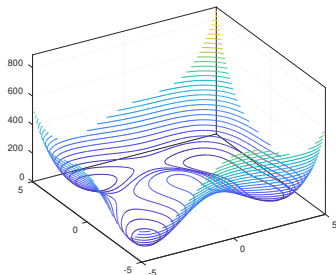
Minimiere

$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2$$

über  $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ .

MATLAB-Code:

```
[x, y] = meshgrid(-5:0.1:5)
;
z = (x.^2 + y - 11).^2 + (x
    + y.^2 - 7).^2;
contour3(x, y, z, 30)
```



Einführung

Dozent  
Thema der  
Lehrveranstaltung  
Organisatorisches

Einleitung

Motivation  
Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Eine **Höhenlinie (Niveaulinie)**  $N_f(c)$  zum Niveau  $c \in \mathbb{R}$  für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist formal definiert als die Menge aller Punkte  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$  für die  $f(x) = c$  gilt:

$$N_f(c) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Einführung

Dozent  
Thema der  
Lehrveranstaltung  
Organisatorisches

Einleitung

Motivation  
Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Auf Höhenlinien von  $f$  steht der **Gradient**

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

senkrecht.

$\nabla f$  ist ein **Spaltenvektor**. Er zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs.

Für reellwertige Funktionen mit einem Definitionsbereich in 1D oder 2D, kann die graphische Methode ganz hilfreich sein.

Einführung

Dozent  
Thema der  
Lehrveranstaltung  
Organisatorisches  
Einleitung

Motivation  
Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

## Beispiel (Agrarwirtschaft)

Ein Landwirt bewirtschaftet ein Grundstück von 40 ha Größe mit Zuckerrüben und Weizen.

Er kann hierzu 2400 € und 312 Arbeitstage einsetzen.

Die Anbaukosten betragen bei Rüben 40 €/ha und bei Weizen 120 €/ha.

Für Rüben benötigt er 6 Arbeitstage/ha und für Weizen 12 Arbeitstage/ha.

Der Reingewinn sei bei Rüben 100 €/ha und bei Weizen 250 €/ha.

Anmerkung:

Wir dürfen bereits vorneweg annehmen, dass die zur Verfügung stehenden 2400 € sofort auszugeben sind und nicht anderweitig gespart bzw. angelegt werden können und somit auch nicht in die Zielfunktion eingehen.

Einführung

Dozent

Thema der

Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Motivation

Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung



# Klassisches lineares Optimierungsproblem II

Lineare und  
nichtlineare  
Optimierung

S.-J. Kimmerle

Einführung

Dozent  
Thema der  
Lehrveranstaltung  
Organisatorisches  
Einleitung

Motivation  
Beispiele

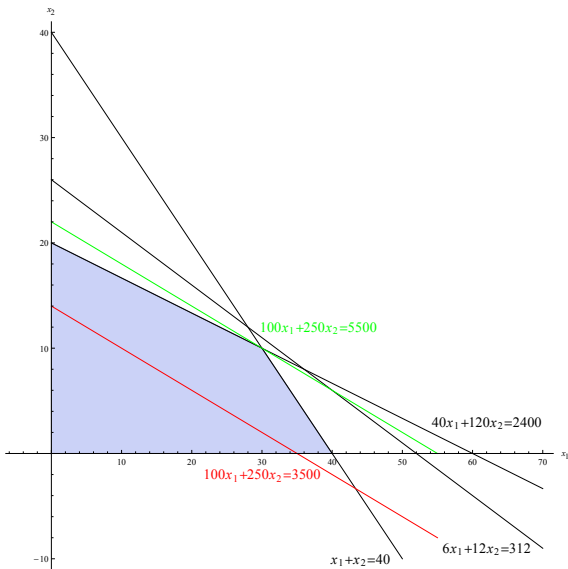
Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung



## Beispiel (Transportproblem)

Ein Transportunternehmer hat  $m$  Vorratslager, aus denen  $n$  Verbraucher mit einem Produkt beliefert werden können.

Die Lieferkosten von Lager  $i$  zu Verbraucher  $j$  betragen  $c_{ij}$  Einheiten pro Produkteinheit.

In Lager  $i$  sind  $a_i$  Einheiten des Produktes vorrätig.

Verbraucher  $j$  hat einen Bedarf von  $b_j$  Einheiten.

Um die Kunden nicht zu verärgern, muss der Lieferant den Bedarf der Kunden befriedigen. Andererseits möchte der Lieferant seine Lieferkosten minimieren.

Einführung

Dozent

Thema der

Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Motivation

Beispiele

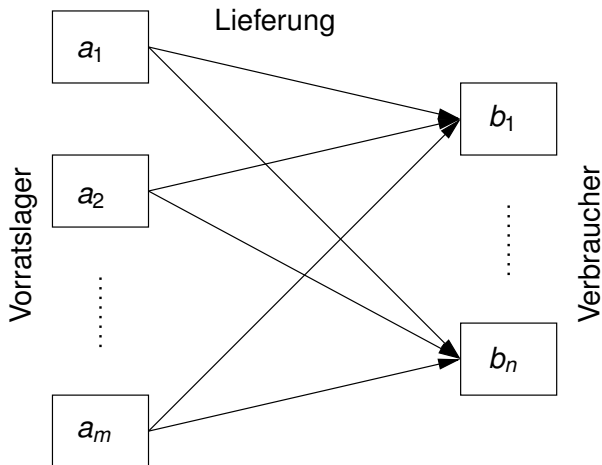
Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung



Einführung

Dozent  
Thema der  
Lehrveranstaltung  
Organisatorisches  
Einleitung

Motivation  
Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Bezeichnet  $x_{ij}$  die Liefermenge von Lager  $i$  zu Verbraucher  $j$ , so führt das Problem auf das folgende Transportproblem, welches ein spezielles lineares Optimierungsproblem ist:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad \text{u.d.N.}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

Die erste Nebenbedingung besagt, dass aus Lager  $i$  maximal  $a_i$  Einheiten abtransportiert werden können.

Die zweite Nebenbedingung besagt, dass der Bedarf  $b_j$  befriedigt werden muss.

Die letzte Nebenbedingung verbietet negative Liefermengen.

Einführung

Dozent  
Thema der  
Lehrveranstaltung  
Organisatorisches

Einführung

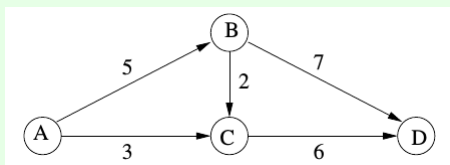
Motivation

Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der LehrveranstaltungUnrestringierte  
OptimierungWichtige Verfahren  
der numerischen  
OptimierungRestringierte  
OptimierungZusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

## Beispiel (Netzwerkproblem)

Eine Firma möchte möglichst viele Waren von A nach D über das abgebildete Straßennetzwerk transportieren.



Die Zahlen neben den Kanten des Netzwerk-Graphen geben die maximale Kapazität der Kante an.

Wie kann dieses Problem mathematisch modelliert werden?

Einführung

Dozent

Thema der

Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Motivation

Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

## Beispiel (Portfoliooptimierungsaufgabe nach Markowitz)

Gegeben seien  $j = 1, \dots, n$  mögliche Anlagen. Jede Anlage wirft im nächsten Zeitraum einen Gewinn (bzw. Verlust)  $R_j$  ab.  $R_j$  ist allerdings nicht bekannt, aber die zugrundeliegende zufällige Verteilung.

Um einerseits den Gewinn zu maximieren und andererseits das Risiko eines Verlusts zu minimieren, wird die Anlagesumme zu prozentualen Anteilen  $x_j$  auf die  $n$  Anlagen verteilt.

Die Aufgabe eines Portfoliomanagers besteht in der optimalen Zusammenstellung des Portfolios  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Einführung

Dozent

Thema der

Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Motivation

Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Ein mögliches Ziel ist es, den Erwartungswert des Gewinns  $R$  zu maximieren:

$$E(R) = \sum_{j=1}^n x_j E(R_j), \quad R = \sum_{j=1}^n x_j R_j$$

Als Maß für das Risiko kann die Varianz von  $R$  betrachtet werden:

$$\text{Var}(R) = E(R - E(R))^2 = ER^2 - (ER)^2$$

Einführung

Dozent

Thema der

Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Motivation

Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Ein Kompromiss ist das folgende Optimierungsproblem

$$\min -E(R) + \alpha \text{Var}(R) \quad \text{u. d. N.}$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

$\alpha \geq 0$  ist dabei ein noch zu wählender Gewichtungparameter.

Desto kleiner  $\alpha$ , desto größer das Risiko.

Einführung

Dozent

Thema der

Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Motivation

Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

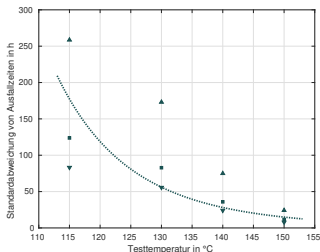
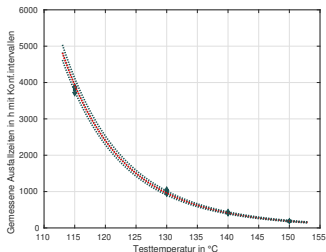
Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung



# (Nicht-)Lineare Ausgleichsrechnung: Ausfallzeiten unter Temperaturbelastung



**Abbildung:** Ausgleichsrechnung über verschiedene Temperaturen  $T$  im Vergleich mit Messpunkten (Quadrate) samt Konfidenzintervallgrenzen zu  $q = 90\%$  (Dreiecke). Links für  $\mu_{krit}(T) \pm \sigma_{krit}(T)$ , in Rot eine Referenzkurve. Rechts  $\sigma_{krit}(T)$ . [K., Dvorsky, Ließ 2018]

Modellbasierter Ansatz

$$f(T) = t_0 \exp\left(\left(\frac{T_a}{T - T_\infty}\right)^d\right)$$

Einführung

Dozent  
Thema der  
Lehrveranstaltung  
Organisatorisches

Einleitung

Motivation  
Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

# Klassifikation von Optimierungsproblemen

Optimierungsprobleme können z. B. folgendermaßen klassifiziert werden:

- **restringiert** oder **unrestringiert**  
(d.h. mit oder ohne Nebenbedingungen)
- **global** oder **lokal**
- **eindimensional** oder **mehrdimensional**
- **stetig** oder **diskret**
- **deterministisch** oder **stochastisch**

In dieser Lehrveranstaltung keine diskreten und wenig zu stochastischen Optimierungsproblemen

Einführung

Dozent  
Thema der  
Lehrveranstaltung  
Organisatorisches  
Einleitung  
Motivation  
Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

- In den meisten praktischen Anwendungen kommen Nebenbedingungen vor, die Optimierungsprobleme sind restringiert.
- Einige Anwendungen führen aber auch zu unrestringierten Problemen.
- Restringierte Probleme können durch eine Reihe von unrestringierten Hilfsproblemen gelöst werden.

↪ Hauptunterteilung in dieser Vorlesung:  
Zuerst unrestringierte Probleme, dann restringierte Probleme

Einführung

Dozent

Thema der

Lehrveranstaltung

Organisatorisches

Einleitung

Motivation

Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

- 1 **Einführung** und eindimensionale Probleme
- 2 Grundlagen der **unrestringierten Optimierung** und evtl. ableitungsfreie Verfahren
- 3 Gradienten-, CG- und (Quasi-)Newton-**Verfahren**
- 4 Beispiele und theoretische Grundlagen der **restringierten Optimierung**
- 5 **Lineare Optimierung**: Simplex-Verfahren und Innere-Punkt-Methode
- 6 **Quadratische Optimierung** mit der Active-Set-Methode
- 7 Allgemeine **nichtlineare Optimierung** mit der SQP-Methode sowie Lagrange- und Penaltyverfahren

Einführung

Dozent  
Thema der  
Lehrveranstaltung  
Organisatorisches

Einleitung  
Motivation  
Beispiele

Klassifikation und Aufbau  
der Lehrveranstaltung

Unrestringierte  
Optimierung

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

- 1 Einführung
- 2 Unrestringierte Optimierung**
  - Unrestringierte Optimierung in 1D
  - Unrestringierte Optimierung in mehreren Dimensionen
- 3 Wichtige Verfahren der numerischen Optimierung
- 4 Restringierte Optimierung
- 5 Zusammenfassung - Ausblick und Wiederholung

Einführung

**Unrestringierte  
Optimierung**

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Wir betrachten hier

## Problem (Unrestringiertes Optimierungsproblem (UOP))

Minimiere  $f(x)$  u. d. N.  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Dabei sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine **mindestens einmal stetig differenzierbare Funktion**.

Idee:

Suche zunächst nach lokalen Minima (aus denen man unter bestimmten Bedingungen globale Extrema erhält).

Ziele:

Notwendige Bedingungen

Hinreichende Bedingungen

Wünschenswert: Notwendige & hinreichende Bedingungen

Numerische Verfahren (meist basierend auf notwendigen Bedingungen)

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D  
Verfahren des goldenen  
Schnitts

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

# Unrestringierte Optimierung für $n = 1$

Wir betrachten hier **zunächst**

## Problem (Unrestringiertes Optimierungsproblem (UOP))

Minimiere  $f(x)$  u. d. N.  $x \in \mathbb{R}$ .

Dabei sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine **mindestens einmal stetig differenzierbare Funktion**.

Idee:

Suche zunächst nach lokalen Minima (aus denen man unter bestimmten Bedingungen globale Extrema erhält).

Ziele:

Notwendige Bedingungen

Hinreichende Bedingungen

Wünschenswert: Notwendige & hinreichende Bedingungen

Numerische Verfahren (meist basierend auf notwendigen Bedingungen)

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D  
Verfahren des goldenen  
Schnitts

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt ein lokales Minimum bei  $\bar{x}$ .

Dann gilt:

- $f'(\bar{x}) = 0$  (Notwendige Bedingung 1. Ordnung)
- $f''(\bar{x}) \geq 0$  (Notwendige Bedingung 2. Ordnung)

Gilt umgekehrt  $f'(\bar{x}) = 0$  und  $f''(\bar{x}) > 0$ ,  
so ist  $\bar{x}$  ein lokales Minimum von  $f$ .  
(Hinreichende Bedingung)

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D  
Verfahren des goldenen  
Schnitts

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung



- $\bar{x}$  kann in den seltensten Fällen analytisch berechnet werden.
- Verfahren, die beide Ableitungen benutzen, sind meist sehr schnell, aber nicht alle Funktionen sind zweimal stetig differenzierbar und Ableitungen sind oft schwer zu berechnen.
- Ableitungsfreie Methoden sind zwar langsamer, aber für eine breitere Klasse von Problemen einsetzbar.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D  
Verfahren des goldenen  
Schnitts

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

- **Annahme:**  $f(x)$  ist zweimal stetig differenzierbar;  $f'(x)$  und  $f''(x)$  können analytisch berechnet werden.
- **Strategie:** Bestimme iterativ eine Nullstelle der ersten Ableitung; starte dazu von einem Wert, in dessen Nähe man ein Minimum vermutet.
- **Verfahren:** Beginne mit Startwert  $x^{[0]}$

$$\text{Für } k = 0, 1, 2, \dots : \quad x^{[k+1]} = x^{[k]} - \frac{f'(x^{[k]})}{f''(x^{[k]})}$$

- **Konvergenz:** Das Newton-Verfahren konvergiert lokal quadratisch, d.h. es gilt

$$|\bar{x} - x^{[k+1]}| \leq c \cdot |\bar{x} - x^{[k]}|^2,$$

falls  $f''$  in einer Umgebung der Nullstelle invertierbar und Lipschitz-stetig.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Nichtlineare Gleichungen treten auf bei:

- Impliziten Verfahren: Z.B. Auflösen der Vorschrift nach  $x^{[k+1]}$
- Bestimmung stationärer Punkte nichtlinearer Differentialgleichungen
- Numerischen Verfahren für nichtlineare Differentialgleichungen
- und in vielen anderen Anwendungen ...

Allgemein: Sei  $g \in C^1(\mathbb{R})$ . Bestimme konstruktiv  $\hat{x}$  so dass

$$g(\hat{x}) = 0.$$

Newton-Verfahren:

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} - \frac{g(x^{[k]})}{g'(x^{[k]})}, \quad x^{[0]} \in \mathbb{R} \text{ gegebener Startwert}$$

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

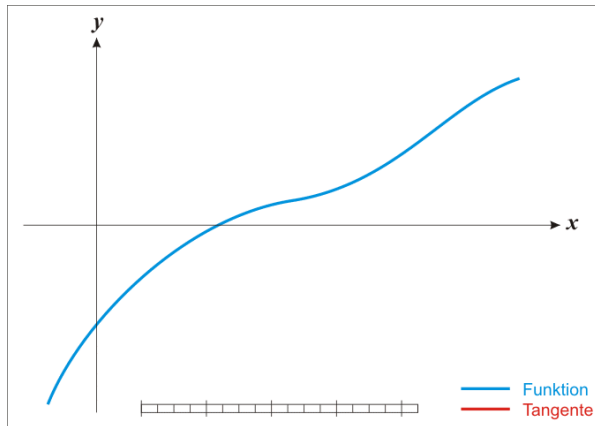
Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Als Beispiel betrachten wir folgende Funktion  $f$  (in der Optimierung betrachtet man typischerweise  $f'$  !):



(hier  $x_n := x^{[n]}$ )

Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

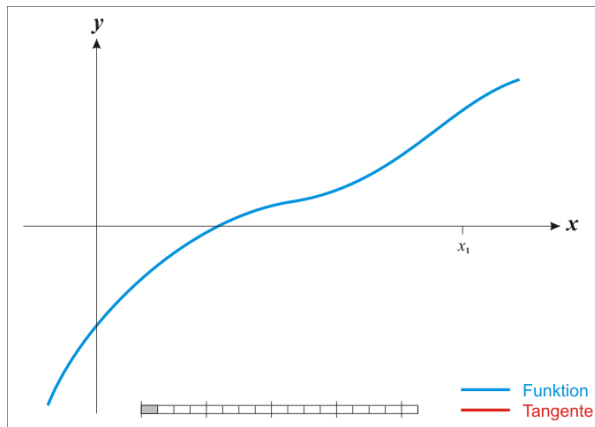
Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Als Beispiel betrachten wir folgende Funktion  $f$  (in der Optimierung betrachtet man typischerweise  $f'$  !):



(hier  $x_n := x^{[n]}$ )

Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

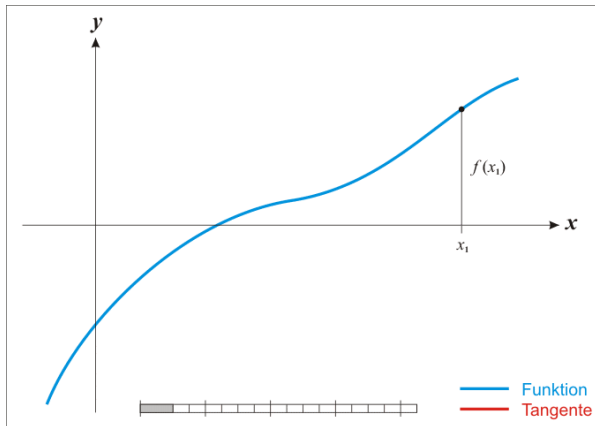
Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Als Beispiel betrachten wir folgende Funktion  $f$  (in der Optimierung betrachtet man typischerweise  $f'$  !):



(hier  $x_n := x^{[n]}$ )

Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

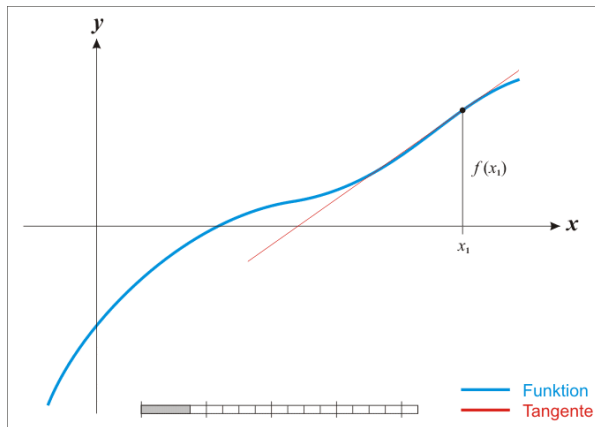
Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

# Newton-Verfahren in 1D

Als Beispiel betrachten wir folgende Funktion  $f$  (in der Optimierung betrachtet man typischerweise  $f'$  !):



(hier  $x_n := x^{[n]}$ )

Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

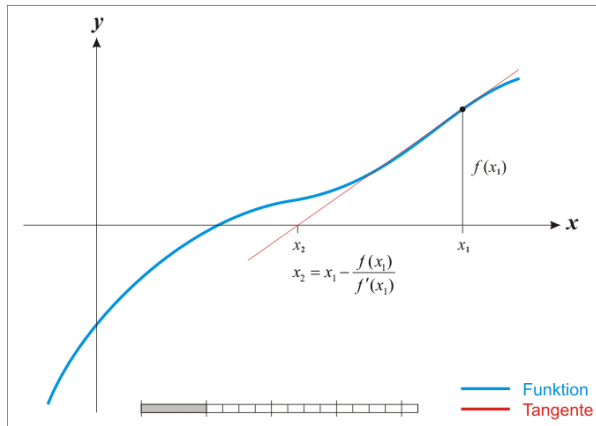
Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

# Newton-Verfahren in 1D

Als Beispiel betrachten wir folgende Funktion  $f$  (in der Optimierung betrachtet man typischerweise  $f'$  !):



(hier  $x_n := x^{[n]}$ )

Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

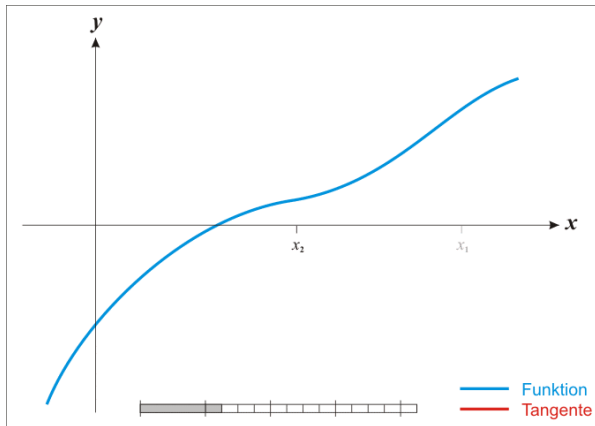
Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung



Als Beispiel betrachten wir folgende Funktion  $f$  (in der Optimierung betrachtet man typischerweise  $f'$  !):



(hier  $x_n := x^{[n]}$ )

Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

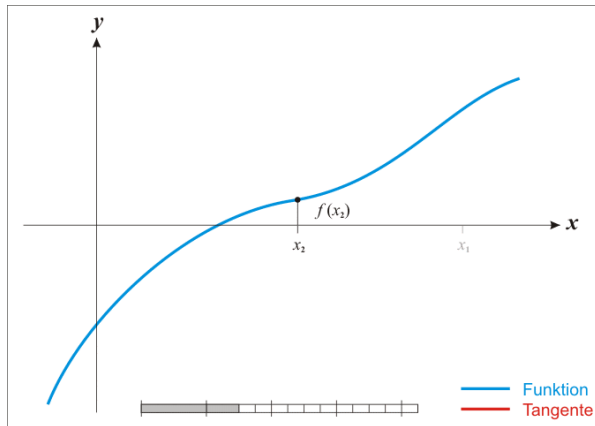
Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

# Newton-Verfahren in 1D

Als Beispiel betrachten wir folgende Funktion  $f$  (in der Optimierung betrachtet man typischerweise  $f'$  !):



(hier  $x_n := x^{[n]}$ )

Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

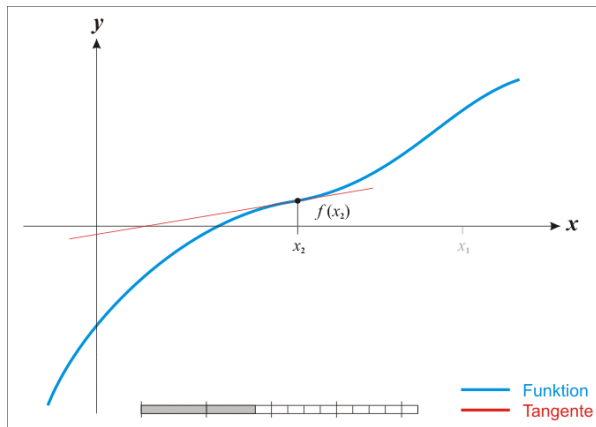
Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

# Newton-Verfahren in 1D

Als Beispiel betrachten wir folgende Funktion  $f$  (in der Optimierung betrachtet man typischerweise  $f'$  !):



(hier  $x_n := x^{[n]}$ )

Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

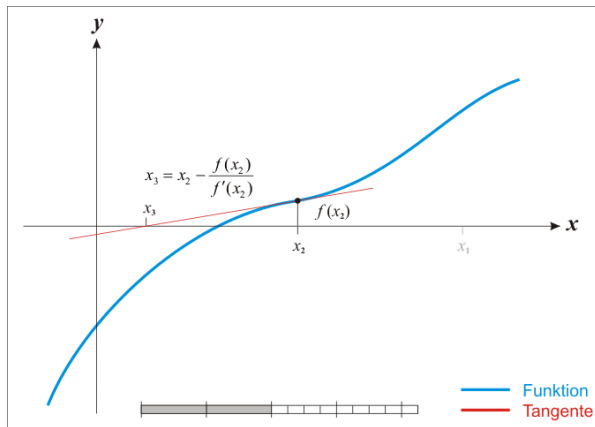
Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Als Beispiel betrachten wir folgende Funktion  $f$  (in der Optimierung betrachtet man typischerweise  $f'$  !):



(hier  $x_n := x^{[n]}$ )

Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

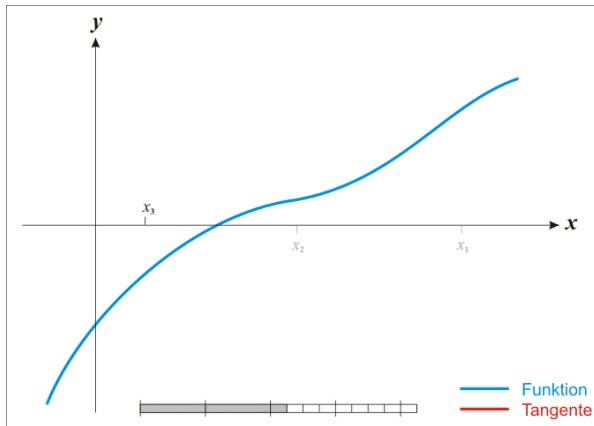
Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Als Beispiel betrachten wir folgende Funktion  $f$  (in der Optimierung betrachtet man typischerweise  $f'$  !):



(hier  $x_n := x^{[n]}$ )

Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

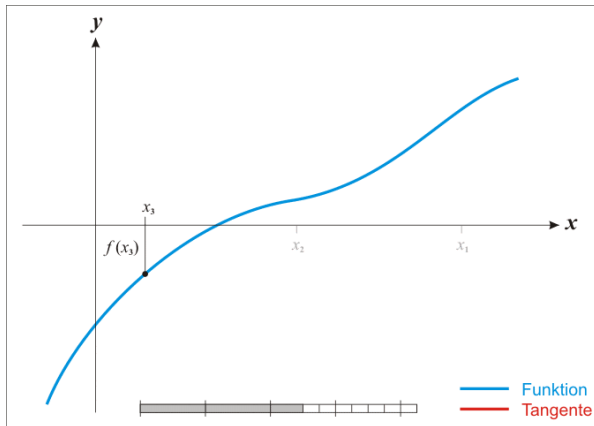
Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Als Beispiel betrachten wir folgende Funktion  $f$  (in der Optimierung betrachtet man typischerweise  $f'$  !):



(hier  $x_n := x^{[n]}$ )

Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

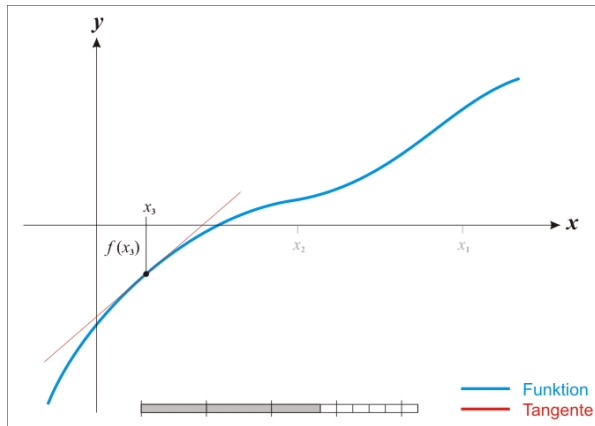
Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Als Beispiel betrachten wir folgende Funktion  $f$  (in der Optimierung betrachtet man typischerweise  $f'$  !):



(hier  $x_n := x^{[n]}$ )

Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

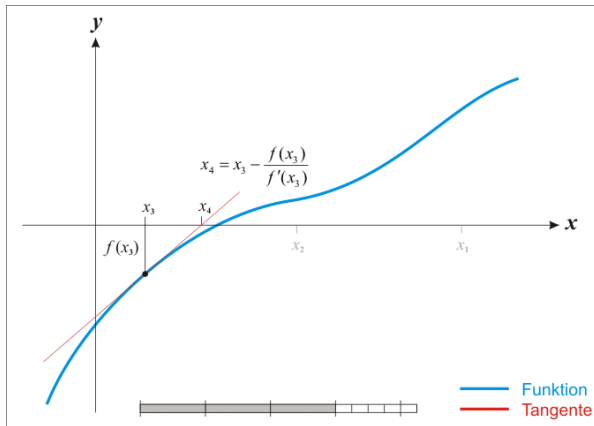
Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Als Beispiel betrachten wir folgende Funktion  $f$  (in der Optimierung betrachtet man typischerweise  $f'$  !):



(hier  $x_n := x^{[n]}$ )

Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

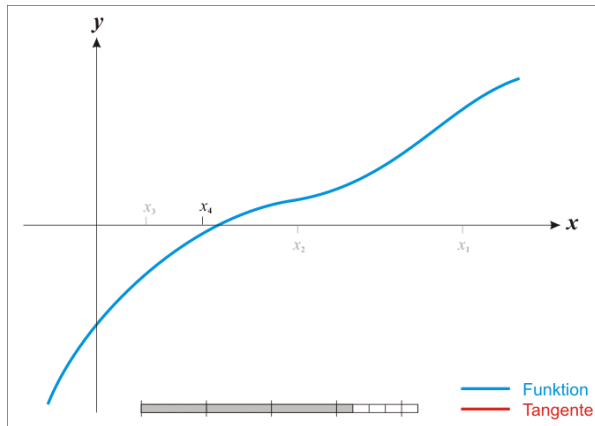
Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung



Als Beispiel betrachten wir folgende Funktion  $f$  (in der Optimierung betrachtet man typischerweise  $f'$  !):



(hier  $x_n := x^{[n]}$ )

Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

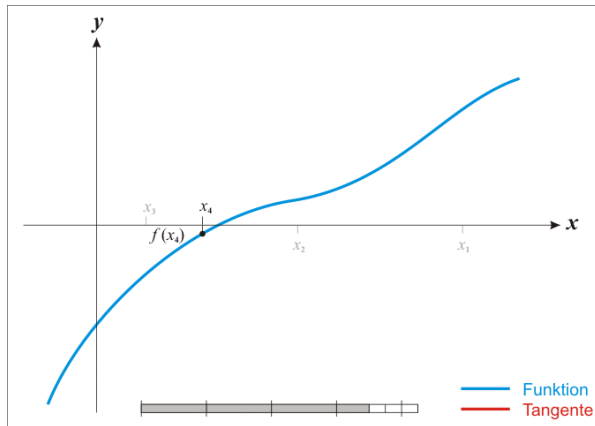
Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

# Newton-Verfahren in 1D

Als Beispiel betrachten wir folgende Funktion  $f$  (in der Optimierung betrachtet man typischerweise  $f'$  !):



(hier  $x_n := x^{[n]}$ )

Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

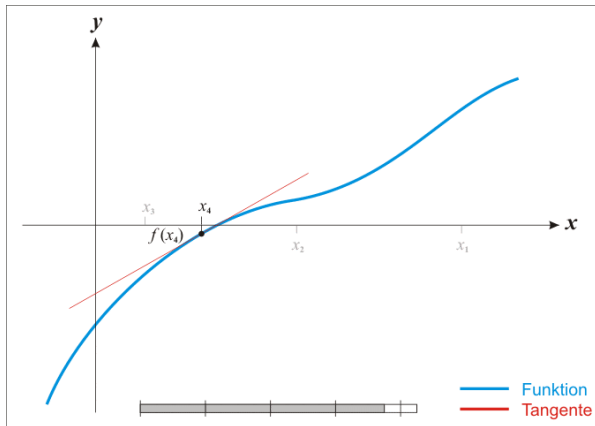
Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

# Newton-Verfahren in 1D

Als Beispiel betrachten wir folgende Funktion  $f$  (in der Optimierung betrachtet man typischerweise  $f'$  !):



(hier  $x_n := x^{[n]}$ )

Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

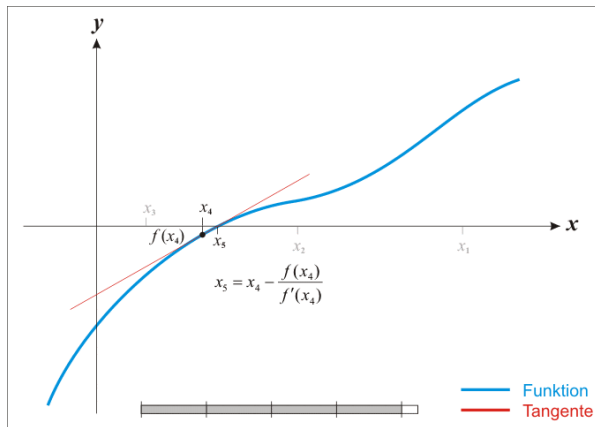
Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Als Beispiel betrachten wir folgende Funktion  $f$  (in der Optimierung betrachtet man typischerweise  $f'$  !):



(hier  $x_n := x^{[n]}$ )

Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>.

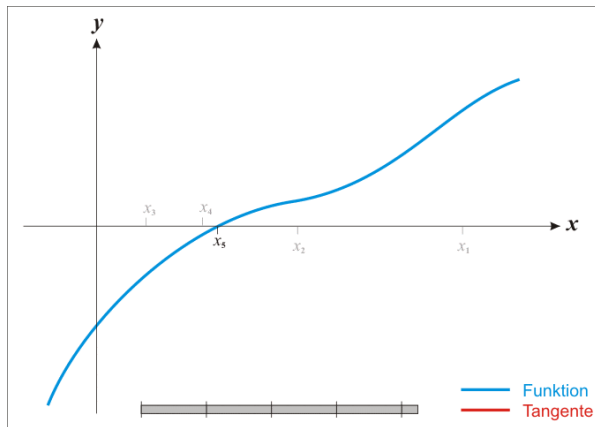
Einführung

Unrestringierte  
OptimierungUnrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
SchnittsUnrestringierte Optimierung  
in mehreren DimensionenWichtige Verfahren  
der numerischen  
OptimierungRestringierte  
OptimierungZusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Als Beispiel betrachten wir folgende Funktion  $f$  (in der Optimierung betrachtet man typischerweise  $f'$  !):



(hier  $x_n := x^{[n]}$ )

Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

- **$f''(x)$  kann nicht explizit berechnet werden.**

⇒ Ersetze  $f''(x)$  durch den Differenzenquotienten oder eine Formel zum numerischen Differenzieren.

- **Das Newton-Verfahren divergiert.**

⇒ Kombination des Newton-Verfahrens mit einem sicheren Verfahren wie z.B. dem Bisektions-Verfahren („safeguarding“) oder Reduktion der Schrittweite (gedämpftes Newton-Verfahren)

- **Das Verfahren konvergiert gegen einen Sattelpunkt.**

⇒ Beginne mit einem anderen Startwert oder führe einige Iterationen mit einem langsamen Verfahren durch.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

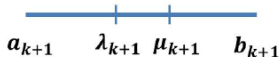
Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

# Bsp.: Verfahren des goldenen Schnitts

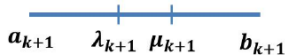
- Annahme:  $f(x)$  stetig mit Minimum in  $[a, b]$
- Teile  $[a, b]$  im Verhältnis des goldenen Schnitts, d. h.  
$$\lambda = a + 0.382 \cdot (b - a) \text{ und}$$
$$\mu = a + 0.618 \cdot (b - a)$$
- Falls  $f(\lambda^{[k]}) > f(\mu^{[k]})$  gehe zu Fall 1 ansonsten zu Fall 2 und wende das Verfahren rekursiv an



Fall 1:



Fall 2:



Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

```
1 function x = Golden(f,a,b,iter)
2 % Beispielaufruf: x=Golden(@(x)(x-1)^2,-1,3,10)
3
4 g=(sqrt(5)-1)/2; % Verhaeltnis des Goldenen Schnitts 0.618
5 lambda=a+(1-g)*(b-a);
6 mu=a+g*(b-a);
7 f_lambda=f(lambda);f_mu=f(mu); % Funktionswerte fuer
   Fallunterscheidung
8 for i=1:iter
9     disp(['a: ',num2str(a),' , b: ',num2str(b),' , f(lam): ',num2str
10         (f_lambda),' , f(mu): ',num2str(f_mu)]);
11     if f_lambda>f_mu
12         a=lambda;lambda=mu;mu=a+g*(b-a);
13         f_lambda=f_mu;f_mu=f(mu);
14     else
15         b=mu;mu=lambda;lambda=a+(1-g)*(b-a);
16         f_mu=f_lambda;f_lambda=f(lambda);
17     end
18 end
19 x=(a+b)/2; %Ausgabewert
20 end
```

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung



- Sichere Konvergenz des Verfahrens, falls  $f(x)$  im betrachteten Intervall konvex oder unimodal ist
- Relativ langsame Konvergenz:  
 $|b_{k+1} - a_{k+1}| = 0.618 \cdot |b_k - a_k|$   
Zum Vergleich Bisektionsverfahren:  
 $|b_{k+1} - a_{k+1}| = 0.5 \cdot |b_k - a_k|$
- Im Gegensatz zum Gradientenverfahren benötigt das Verfahren des goldenen Schnitts keine Ableitungen.
- Durch das besondere Teilungsverhältnis des goldenen Schnitts spart man in jedem Schritt eine Funktionsauswertung
- Weitere Verfahren:
  - Sukzessive parabolische Interpolation: Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit durch Verwendung von Funktionswerten
  - Sekantenverfahren als Alternative zum Newton-Verfahren

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Newton-Verfahren in 1D

Verfahren des goldenen  
Schnitts

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

# Unrestringierte Optimierung für $n \geq 1$

Lineare und  
nichtlineare  
Optimierung

S.-J. Kimmerle

Wir betrachten hier

## Problem (Unrestringiertes Optimierungsproblem (UOP))

Minimiere  $f(x)$  u. d. N.  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Dabei sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine *mindestens einmal stetig differenzierbare Funktion*.

Idee:

Suche zunächst nach lokalen Minima (aus denen man unter bestimmten Bedingungen globale Extrema erhält).

Ziele:

Notwendige Bedingungen

Hinreichende Bedingungen

Wünschenswert: Notwendige & hinreichende Bedingungen

Numerische Verfahren (meist basierend auf notwendigen Bedingungen)

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Notwendige &  
hinreichende Bedingungen  
Konvex und konkav

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

- Der **Gradient** einer Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  ist definiert als Spaltenvektor

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Im Fall  $n = 1$  ist der Gradient die 1. Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x$ , kurz  $f'(x)$ .

Anschaulich beschreibt der Gradient den Anstieg.

Der Gradient steht senkrecht auf Niveaulinien.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Notwendige &  
hinreichende Bedingungen  
Konvex und konkav

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

- Die **Hesse-Matrix** einer Funktion  $f$  an der Stelle  $x$  ist definiert durch

$$H_f(x_1, \dots, x_n) = H(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Im Fall  $n = 1$  ist die Hesse-Matrix die 2. Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x$ , kurz  $f''(x)$ .

Anschaulich beschreibt die Hesse-Matrix die lokale Krümmung einer Funktion.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

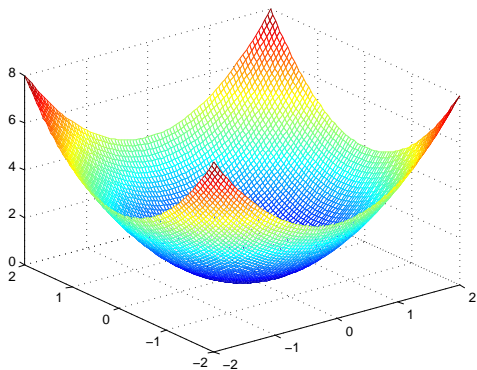
Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Notwendige &  
hinreichende Bedingungen  
Konvex und konkav

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung



$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \quad H_f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

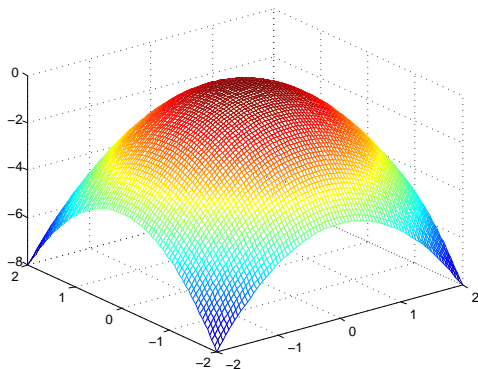
Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Notwendige &  
hinreichende Bedingungen  
Konvex und konkav

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung



$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2, \quad H_f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

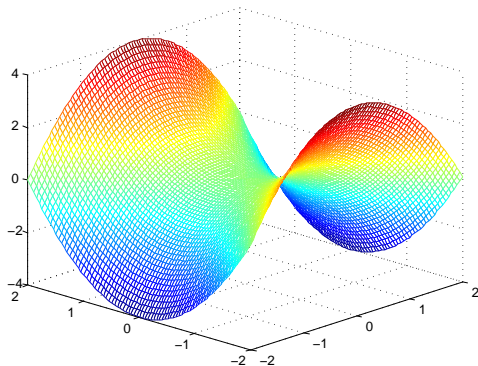
Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Notwendige &  
hinreichende Bedingungen  
Konvex und konkav

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung



$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2, \quad H_f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Notwendige &  
hinreichende Bedingungen

Konvex und konkav

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

## Richtungsableitung

Die Richtungsableitung  $f'(x; d)$  einer stetig differenzierbaren Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $x \in \mathbb{R}^n$  in Richtung  $d \in \mathbb{R}^n$  ist definiert durch

$$f'(x; d) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + td) - f(x)}{t} = \nabla f(x)^\top d.$$

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Notwendige &  
hinreichende Bedingungen  
Konvex und konkav

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung



## Taylorentwicklung

- Ist  $f$  stetig differenzierbar, dann kann  $f$  in einer Umgebung von  $\hat{x}$  durch eine **affin-lineare Funktion** approximiert werden, da

$$f(x) = f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x})^\top (x - \hat{x}) + o(\|x - \hat{x}\|),$$

wobei

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{o(\|x - \hat{x}\|)}{\|x - \hat{x}\|} = 0.$$

bzw. alternativ mit  $t \in \mathbb{R}$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$ ,  $\xi_t \in (0, t)$

$$f(\hat{x} + td) = f(\hat{x}) + t \nabla f(\hat{x} + \xi_t d)^\top d.$$

Einführung

Unrestringierte  
OptimierungUnrestringierte Optimierung  
in 1DUnrestringierte Optimierung  
in mehreren DimensionenNotwendige &  
hinreichende Bedingungen  
Konvex und konkavWichtige Verfahren  
der numerischen  
OptimierungRestringierte  
OptimierungZusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

- Ist  $f$  2mal stetig differenzierbar, dann kann  $f$  in einer Umgebung von  $\hat{x}$  durch eine quadratische Funktion approximiert werden, da

$$f(x) = f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x})^\top (x - \hat{x}) + \frac{1}{2}(x - \hat{x})^\top H_f(\hat{x})(x - \hat{x}) + o(\|x - \hat{x}\|^2).$$

bzw. alternativ

$$f(\hat{x} + td) = f(\hat{x}) + t \nabla f(\hat{x})^\top d + \frac{t^2}{2} d^\top H_f(\hat{x} + \xi_t d) d.$$

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

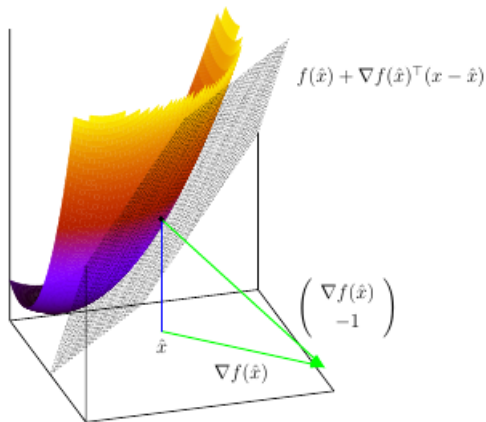
Notwendige &  
hinreichende Bedingungen  
Konvex und konkav

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

## In 2D: Tangentialebene



Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Notwendige &  
hinreichende Bedingungen  
Konvex und konkav

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

# Notwendige/hinreichende Bedingungen:

## Notw. Bed. 1. Ordnung

### Theorem (Notwendige Bedingung 1. Ordnung)

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  
 $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  ein lokales Minimum von  $f$ .

Dann gilt

$$\nabla f(\hat{x}) = 0.$$

### Definition (Stationärer Punkt)

Jeder Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\nabla f(x) = 0$  heißt **stationärer Punkt** von  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Stationäre Punkte sind nicht automatisch (lokale) Minima, sondern nur potentielle Kandidaten!

Die meisten numerischen Verfahren versuchen stationäre Punkte zu approximieren.

## Theorem (Notwendige Bedingung 2. Ordnung)

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  2mal stetig differenzierbar und  
 $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  ein lokales Minimum von  $f$ .

Dann ist die Hesse-Matrix

$$H_f(\hat{x})$$

positiv semidefinit.

Im Fall  $n = 1$  gilt

$$f''(\hat{x}) \geq 0.$$

Ebenfalls findet man hierdurch nur potentielle Kandidaten für ein (lokales) Minimum.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Notwendige &  
hinreichende Bedingungen

Konvex und konkav

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

## Theorem (Hinreichende Bedingung 2. Ordnung)

*Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  2mal stetig differenzierbar und  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  ein stationärer Punkt von  $f$  mit positiv definiten Hesse-Matrix.*

*Dann ist  $\hat{x}$  ein striktes lokales Minimum von  $f$ .*

*Im Fall  $n = 1$  wird vorausgesetzt, dass*

$$f''(\hat{x}) > 0.$$

Damit können wir entscheiden, ob ein Kandidat  $\hat{x}$  der notwendigen Bedingungen (1. und 2. Ordnung) erfüllt, in der Tat ein lokales Minimum ist.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Notwendige &  
hinreichende Bedingungen

Konvex und konkav

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Stellen  $\bar{x}$  mit  $\nabla f(\bar{x}) = (0, 0, \dots, 0)$  heißen **stationäre Punkte**.

Abhängig von den Eigenschaften der Hesse-Matrix erhält man:

- **positiv definit:** lokales Minimum
- **negativ definit:** lokales Maximum
- **indefinit:** Sattelpunkt
- **singulär:** alles möglich (z.B. bei positiv oder negativ semidefiniter Hesse-Matrix)

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Notwendige &  
hinreichende Bedingungen

Konvex und konkav

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

- Eine **Menge**  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **konvex**, falls zu zwei beliebigen Punkten auch die gesamte Verbindungsstrecke zu  $x$  gehört, d. h.

$$\forall x, y \in X : \forall \lambda \in [0, 1] : x + \lambda(y - x) \in X$$

- Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex. Eine **Funktion**  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **konvex**, falls für zwei beliebige Punkte der Graph unterhalb der Verbindungsstrecke liegt, d. h.

$$\forall x, y \in X : \forall \lambda \in [0, 1] : f(x + \lambda(y - x)) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$$

- Eine **Funktion**  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **streng konvex**, falls

$$\forall x, y \in X : \forall \lambda \in [0, 1] : f(x + \lambda(y - x)) < f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$$

- Eine **Funktion**  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **konkav**, falls

$$\forall x, y \in X : \forall \lambda \in [0, 1] : f(x + \lambda(y - x)) \geq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$$



## Konvexitätskriterium:

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  eine konvexe Menge und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar.

Dann gilt:

$f$  ist konvex auf  $X \Leftrightarrow \forall x \in X : H_f(x)$  ist positiv semidefinit

## Folgerung:

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  eine konvexe Menge und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine konvexe Funktion.

Dann ist jeder stationäre Punkt von  $f$  ein lokales und auch ein globales Minimum von  $f$ .

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Notwendige &  
hinreichende Bedingungen

Konvex und konkav

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

# Beispiele zu konvexen Mengen und Funktionen

Konvexe Mengen sind beispielsweise:

- $\mathbb{R}^n$
- Alle Polyeder, insbesondere Rechtecke, Quader und höherdimensionale Quader
- Alle kreis- und kugelförmigen Mengen

Folgende Funktionen sind konvex auf  $\mathbb{R}^2$ :

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y) = (x - 2)^4 + (y - 5)^4$

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Notwendige &  
hinreichende Bedingungen

Konvex und konkav

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Sei  $c \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist ein unrestringiertes lineares Optimierungsproblem gegeben durch:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

Wegen  $\nabla f(x) = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$  haben unrestringierte lineare Optimierungsprobleme keine stationären Punkte.

Einführung

Unrestringierte  
Optimierung

Unrestringierte Optimierung  
in 1D

Unrestringierte Optimierung  
in mehreren Dimensionen

Notwendige &  
hinreichende Bedingungen

Konvex und konkav

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
Optimierung

Restringierte  
Optimierung

Zusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung

Sei  $Q$  eine symmetrische  $n \times n$  Matrix und  $q \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist ein unrestringiertes quadratisches Optimierungsproblem geg. durch:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

mit

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x$$

Falls  $Q$  positiv semidefinit ist, so ist  $f(x)$  konvex.

Zweidimensionaler Fall:  $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$  und  $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ :

$$\frac{1}{2}x^T Qx + q^T x = \frac{1}{2}q_{11}x_1^2 + q_{21}x_1x_2 + \frac{1}{2}q_{22}x_2^2 + q_1x_1 + q_2x_2$$

Einführung

Unrestringierte  
OptimierungUnrestringierte Optimierung  
in 1DUnrestringierte Optimierung  
in mehreren DimensionenNotwendige &  
hinreichende Bedingungen

Konvex und konkav

Wichtige Verfahren  
der numerischen  
OptimierungRestringierte  
OptimierungZusammenfassung  
- Ausblick und  
Wiederholung