Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Lineare und nichtlineare Optimierung
Dr. habil. S.-J. Kimmerle



# 5. Übung

Herbsttrimester 2019

17) Seien $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ Parameter im linearen Programm

$$\begin{array}{llllllll}
\textit{Minimiere} & -x_1 + 2x_2 - x_3 & & & \\
\textit{u.d.N.} & x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 & & = & 4 + \delta_1, \\
 & -x_1 + x_2 + 2x_3 & + x_5 & = & 2 + \delta_2, & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
\end{array}$$

Durch das folgende Simplextableau ist eine optimale Lösung des ungestörten Problems (d.h. für $\delta_1 = \delta_2 = 0$) gegeben:

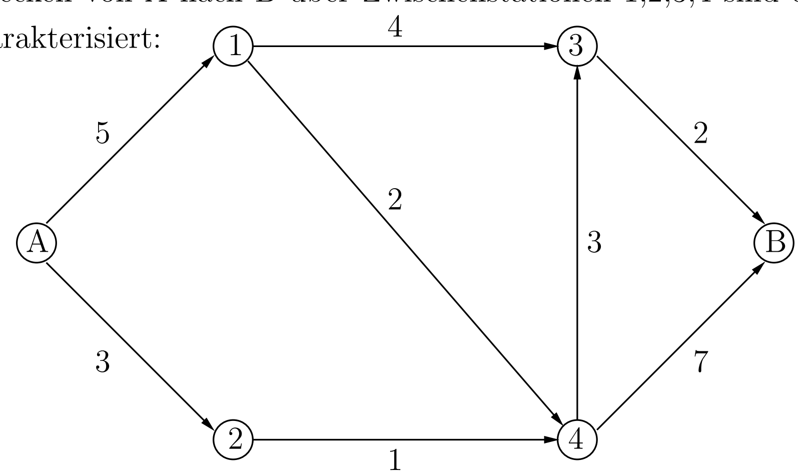
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | 2 | 5 | |
| 1 | 2 | 7 | 1 | 10 |
| 3 | 1 | 4 | 1 | 6 |
| | -3 | -13 | -2 | -16 |

(a) Formulieren Sie das duale Problem für $\delta_1 = \delta_2 = 0$ und bestimmen Sie eine duale Lösung, ohne das duale Problem explizit zu lösen.

(b) Berechnen Sie eine optimale Lösung des gestörten Problems, wobei die Störungen $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ nahe genug bei $(0, 0)$ liegen sollen.
Hinweise: Benutzen Sie den Ansatz $x_B(\delta) = x_B(0) + A_B^{-1}(\delta)$ und $x_N(\delta) = 0$.

(c) Skizzieren Sie die Werte von $\delta_1$ und $\delta_2$ aus (b), für die die Lösung, die Sie in (b) erhalten haben, optimal bleibt.

18) Ein Routenplaner steht vor dem Problem, den kürzesten Weg zwischen zwei Städten A und B zu berechnen. Dabei sei A der Startort und B der Zielort. Die möglichen Verbindungsstrecken von A nach B über Zwischenstationen 1,2,3,4 sind durch folgendes Netzwerk charakterisiert:



Die Länge des Weges zwischen zwei Stationen ist über der jeweiligen Verbindungskante eingetragen. Formulieren Sie die Aufgabe als lineares Optimierungsproblem.

19) Lösen Sie das lineare Programm

$$\text{Maximiere } x_1 + 3x_2 \text{ unter } x_1 + x_2 \leq 2,\ x_1 + 3x_2 \leq p,\ x_1, x_2 \geq 0$$

grafisch in Abhängigkeit von $p \in \mathbb{R}$ und geben Sie die Lösung(en) an. Skizzieren Sie die Maximalwertfunktion

$$w(p) := \max\{x_1 + 3x_2 \mid x_1 + x_2 \leq 2,\ x_1 + 3x_2 \leq p,\ x_1, x_2 \geq 0\}$$

für $p \in \mathbb{R}$.

20) Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionen, dass die Zielfunktion $f(x) = c^\top x$ und der zulässige Bereich $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ eines linearen Programms in primaler Normalform konvex ist.

# Lösungen

17) (a) Das ungestörte Problem ist ein lineares Programm mit der Standardform:

$$c = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das duale Problem hierzu lautet: Maximiere

$$4y_1 + 2y_2$$

mit

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &\leq -1, \\ 3y_1 + y_2 &\leq 2, \\ -y_1 + 2y_2 &\leq -1, \\ y_1 &\leq 0, \\ y_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Eine optimale duale Lösung ist bestimmt durch

$$y^\top = c_B^\top A_B^{-1}.$$

Mit Hilfe der angegebenen Tabelle erhalten wir $B = \{1, 3\}$, $c_B = (-1, -1)^\top$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ und $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Also ist durch

$$(y_1, y_2) = (-1, -1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (-3, -2)$$

eine optimale duale Lösung gegeben.

(b) Ist $\delta \neq 0$ hinreichend nahe bei 0, ist eine optimale Lösung des gestörten Problems bestimmt durch

$$x_B(\delta) = x_B(0) + A_B^{-1}\delta, \qquad x_N(\delta) = 0.$$

In unserem Fall erhält man: $x_B(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$ und $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

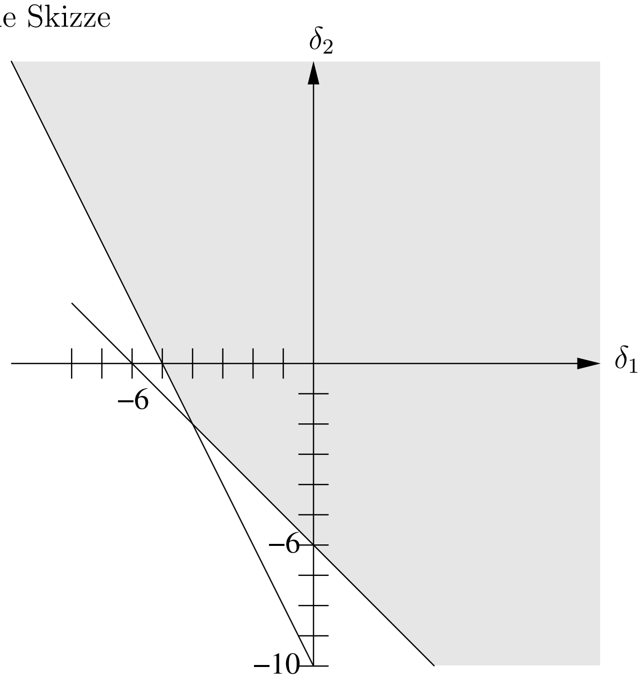
Also ist eine optimale Lösung gegeben durch

$$\begin{aligned} x_B(\delta) &= \begin{pmatrix} x_1(\delta) \\ x_3(\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + 2\delta_1 + \delta_2 \\ 6 + \delta_1 + \delta_2 \end{pmatrix}, \\ x_N(\delta) &= \begin{pmatrix} x_2(\delta) \\ x_4(\delta) \\ x_5(\delta) \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

(c) Die Lösung bleibt optimal für alle $\delta_1, \delta_2$ mit

$$\begin{aligned} 2\delta_1 + \delta_2 &\geq -10, \\ \delta_1 + \delta_2 &\geq -6. \end{aligned}$$

Man erhält folgende Skizze




18) Wir bezeichnen die 8 Kanten des Netzwerks mit

$$E = \{A1, A2, 13, 14, 24, 3B, 43, 4B\}$$

und die Knoten mit

$$V = \{A, 1, 2, 3, 4, B\}.$$

Die Verbindungsstruktur des Graphen wird durch die Inzidenzmatrix $A = (a_{ij})$ beschrieben. Dabei wird

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Kante } ij \text{ in Knoten } i \text{ beginnt,} \\ -1, & \text{falls Kante } ij \text{ in Knoten } j \text{ endet,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gesetzt. Dies liefert

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(die Zeilen entsprechen den Knoten, die Spalten den Kanten; in jeder Spalte gibt es daher eine 1, eine $-1$ und sonst nur Nullen).

Sei $x = (x_{A1}, x_{A2}, x_{13}, x_{14}, x_{24}, x_{3B}, x_{43}, x_{4B})^\top$ die Menge, die über die jeweiligen Kanten transportiert wird. Es soll eine positive Menge transportiert werden: $x \geq 0$.

Dann sind die Kosten (bzw. die Länge des/der Wege) gegeben durch

$$c^\top x = (5, 3, 4, 2, 1, 2, 3, 7)x.$$

Wir wollen den kürzesten Weg finden, d.h., wir wollen genau eine Einheit (z.B. ein Auto) von A nach B transportieren. Dies lässt sich so modellieren: Der Knoten A hat den Vorrat 1, der Knoten B den Bedarf -1 (Konvention: Vorrat positiv, Bedarf negativ).

Alle übrigen Knoten haben weder einen Vorrat noch einen Bedarf, d.h. der Gesamtbedarf ist 0. Außerdem sollen im Knoten $i$ die Bilanzgleichungen

$$\underbrace{\sum_{il} x_{il}}_{\text{Transport aus Knoten } i} \quad - \quad \underbrace{\sum_{ji} x_{ji}}_{\text{Transport in Knoten } i} \quad = \text{Vorrat/Bedarf}$$

gelten. Dies führt auf die Nebenbedingungen

$$Ax = b \qquad \text{mit} \qquad b^\top = (1, 0, \ldots, 0, -1)^\top.$$

Insgesamt:

Minimiere $5x_{A1} + 3x_{A2} + 4x_{13} + 2x_{14} + x_{24} + 2x_{3B} + 3x_{43} + 7x_{4B}$
unter

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{A1} \\ x_{A2} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{24} \\ x_{3B} \\ x_{43} \\ x_{4B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad x \geq 0.$$

**Bemerkung:** Man kann noch fordern, dass die Komponenten von $x$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen dürfen. Allerdings lässt sich beweisen, dass die Lösung $x$ für dieses Problem stets ganzzahlig ist.

**Zusatz:** Lösung mit MATLAB:

Das Skript `Aufg18_Routenplanung.m`

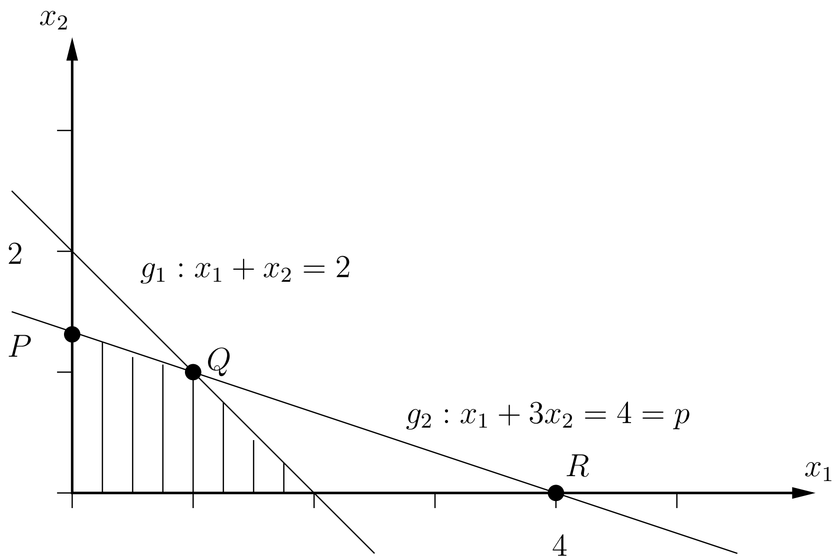
```
%xA1 -> x(1), xA2 -> x(2), x13 -> x(3), x14 -> x(4), x24 -> x(5), x3B -> x(6), x43 -> x
    (7), x4B -> x(8)
%x = [x(1) x(2) x(3) x(4) x(5) x(6) x(7) x(8)]';
f = @(x) 5*x(1) + 3*x(2) + 4*x(3) + 2*x(4) + x(5) + 2*x(6) + 3*x(7) + 7*x(8);
%Lineare Gleichungen
Aeq = [1 1 0 0 0 0 0 0;
    -1 0 1 1 0 0 0 0;
    0 -1 0 0 1 0 0 0;
    0 0 -1 0 0 1 -1 0;
    0 0 0 -1 -1 0 1 1;
    0 0 0 0 0 -1 0 -1];
beq = [1 0 0 0 0 -1]';
%Untere Schranken
lb = [0 0 0 0 0 0 0 0]';
%Startwert
x0 = ones(8,1); %zeros(8,1); %[1 0 1 0 0 1 0 0]';
options = optimoptions('fmincon','Algorithm','sqp','Display','iter');
%Aufruf des nichtlin. Loesers. Fehlende (Un-)Gleichungen oder Schranken sind durch [] zu
    ersetzen.
x = fmincon(f,x0,[],[],Aeq,beq,lb,[],[],options)
```

erzeugt die Ausgabe:

```
>> Aufg18_Routenplanung
 Iter  Func-count            Fval   Feasibility   Step Length       Norm of   First-order
                                                                       step    optimality
    0           9    2.700000e+01     1.000e+00     1.000e+00     0.000e+00     7.000e+00
    1          18    9.000000e+00     2.220e-16     1.000e+00     2.000e+00     1.000e+00
    2          27    9.000000e+00     3.123e-32     1.000e+00     4.839e-16     3.109e-15

Local minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in
feasible directions, to within the default value of the optimality tolerance,
and constraints are satisfied to within the default value of the constraint tolerance.

<stopping criteria details>

x =
    0.0000
    1.0000
    0.0000
    0.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
         0
```

Aus $x$ ergibt sich die optimale Route.

19)




Es gilt: $P = (0, p/3)^\top$, $Q = \left(\frac{6-p}{2}, \frac{p-2}{2}\right)^\top$ und $R = (p, 0)^\top$.

Das Problem ist **lösbar**, solange $P = (0, p/3)^\top \geq 0$ gilt (dann ist der zulässige Bereich nicht leer). Dies ist für $p \geq 0$ der Fall.

Die Zielfunktion verläuft parallel zu $g_2$.

Die Lösung ist **eindeutig**, wenn $P$ und $Q$ zusammenfallen, d.h. wenn $0 = (6-p)/2$ und $p/3 = (p-2)/2$ gelten. Dies ist für $p = 6$ und analog für $p > 6$ der Fall und die zugehörige Lösung ist $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $f = 6$ für $p \geq 6$.

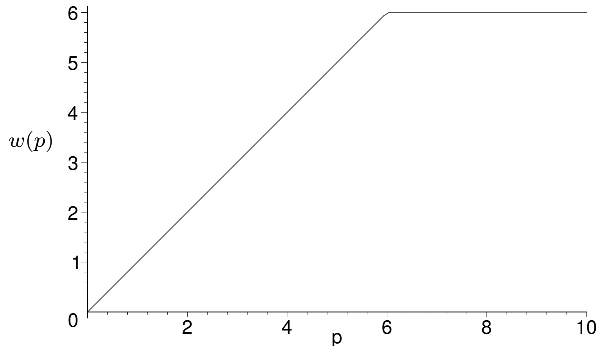
Andernfalls ist die Lösung **nicht eindeutig**. Solange die erste Komponente von $R$ größer als 2 ist, ist die optimale Lösung durch die Kante $PQ$ gegeben. Jedes optimale $x$ lässt sich als Konvexkombination von $P$ und $Q$ schreiben: Für $p \geq 2$ und $0 \leq \lambda \leq 1$, folgt

$$x = (x_1, x_2)^\top = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ p/3 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} (6-p)/2 \\ (p-2)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)(6-p)/2 \\ (p-2)/2 + \lambda(6-p)/6 \end{pmatrix}$$

und Zielfunktionswert $f = p$. Wenn die erste Komponente von $R$ kleiner als 2 ist, ist die optimale Lösung durch die Kante $PR$ gegeben. Jedes optimale $x$ lässt sich als Konvexkombination von $P$ und $R$ schreiben: Für $p \leq 2$ und $0 \leq \lambda \leq 1$, folgt

$$x = (x_1, x_2)^\top = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ p/3 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)p \\ \lambda p/3 \end{pmatrix}$$

und Zielfunktionswert $f = p$. Insgesamt ist die Maximalwertfunktion für $p \geq 0$ definiert und hat folgende konkave Struktur:




20) Sei $\lambda \in [0,1]$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gilt

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = c^\top(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda c^\top x + (1-\lambda)c^\top y = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

also ist $f$ eine konvexe Funktion. Ferner gilt für belibige $x, y \in P$:

$$A(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda Ax + (1-\lambda)Ay = \lambda b + (1-\lambda)b = b,$$

und mit $x \geq 0, y \geq 0$ folgt sofort $\lambda x + (1-\lambda)y \geq 0$. Somit ist $(\lambda x + (1-\lambda)y) \in P$ und $P$ ist eine konvexe Menge.