Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Angewandte Mathematik
und Wissenschaftliches Rechnen
Lineare und nichtlineare Optimierung
Dr. habil. S.-J. Kimmerle

1. Übung

Herbsttrimester 2019

1) Ein Soldat des Kampfmittelräumdienstes steht vor folgendem Problem: Auf einem Boot befindet sich eine Bombe die in 75 Sekunden explodiert. Das Boot befindet sich in 50 Metern Entfernung vom geradlinig verlaufenden Strand, der Soldat ist am Strand, aber noch 100 Meter von dem Punkt am Strand entfernt, der dem Boot am nächsten ist. Der gut trainierte Soldat schafft es am Strand mit einer Geschwindigkeit von 5 Metern pro Sekunde zu rennen und im Wasser mit einer Geschwindigkeit von 2 Metern pro Sekunde zu schwimmen. Kann er die Bombe rechtzeitig entschärfen, wenn er für das Entschärfen selbst 30 Sekunden benötigt?

2) Bei der Herstellung von Konserven werden für Boden und Deckel bzw. für den Konservenmantel verschiedene Materialien verwendet, die $c_1 = 2$ bzw. $c_2 = 4$ Geldeinheiten pro Flächeneinheit kosten. Zu einem vorgegebenen Volumen $V = 10$ soll eine passende Konserve hergestellt werden, die möglichst billig ist. Formulieren Sie die Aufgabe als nichtlineares Optimierungsproblem und bestimmen Sie die Lösung.

3) Eine Spedition hat an zwei Orten A und B LKWs (gleicher Größe) stehen, und zwar 18 am Ort A und 12 am Ort B. In drei Umschlagplätzen R, S und T werden 11, 10 bzw. 9 LKWs zum Verladen von Waren benötigt. Die Distanzen zwischen den Orten und den Umschlagplätzen sind:

	R	S	T
A	5	4	9
B	7	8	10

Die LKWs sind so zu verteilen, dass die Anzahl der gefahrenen Leerkilometer minimal ist und der Bedarf an jedem Umschlagplatz gedeckt ist. Formulieren Sie diese Problemstellung als lineares Programm und lösen Sie es graphisch.

Lösungen

1) Zunächst muss der Soldat entscheiden, wie er am schnellsten zu der Bombe gelangt. Er rennt zuerst mit einer Geschwindigkeit von 5 Metern pro Sekunde x Meter am Strand entlang. Dafür benötigt er $\frac{x}{5}$ Sekunden. Dann schwimmt er mit einer Geschwindigkeit von 2 Metern pro Sekunde gerade auf das Boot mit der Bombe zu. Die Schwimmstrecke berechnet sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras zu $\sqrt{50^2 + (100-x)^2}$ Metern, sodass er $\frac{1}{2}\sqrt{50^2 + (100-x)^2}$ Sekunden schwimmen muss. Den schnellsten Weg erhält man nun durch Lösen der Minimierungsaufgabe

$$\min \frac{x}{5} + \frac{1}{2}\sqrt{50^2 + (100-x)^2} \quad \text{u.d.N.} \quad x \in [0, 100].$$

Die notwendige Optimalitätsbedingung liefert

$$\begin{array}{rrcl} & 0 & = & \frac{1}{5} - \frac{100-x}{2\sqrt{50^2+(100-x)^2}} \\ \Leftrightarrow & 100 - x & = & \frac{2}{5}\sqrt{50^2 + (100-x)^2} \\ \Leftrightarrow & (100-x)^2 & = & \frac{4}{25}(50^2 + (100-x)^2) \\ \Leftrightarrow & \frac{21}{25}(100-x)^2 & = & \frac{4}{25} \cdot 50^2 \\ \Leftrightarrow & (100-x)^2 & = & \left(\frac{2\cdot 50}{\sqrt{21}}\right)^2 \end{array}$$

Wegen $x \in [0, 100]$ folgt daher

$$x = 100 - \frac{100}{\sqrt{21}} = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{21}}\right).$$

Die gefundene Lösung ist ein Minimum, da die zweite Ableitung

$$\frac{\sqrt{50^2 + (100-x)^2} - (x-100) \cdot \frac{(x-100)}{\sqrt{50^2+(100-x)^2}}}{50^2 + (100-x)^2} = \frac{50^2}{(50^2 + (100-x)^2)^{3/2}} > 0$$

ist. Damit benötigt der Soldat zum Erreichen des Bootes

$$20\left(1 - \frac{1}{\sqrt{21}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{50^2 + \left(\frac{2\cdot 50}{\sqrt{21}}\right)^2} = 20\left(1 - \frac{1}{\sqrt{21}}\right) + \frac{125}{\sqrt{21}} = 42.91...$$

Sekunden. Mit den 30 Sekunden zum Entschärfen der Bombe benötigt der Soldat also weniger als 73 Sekunden und schafft es daher die Bombe vor deren Explosion zu entschärfen.

2) Bezeichne r den Radius der Dose und h deren Höhe. Dann ergeben sich folgenden Größen:
Fläche Boden und Deckel: $2\pi r^2$
Fläche Mantel: $2\pi r h$
Volumen der Dose: $\pi r^2 h$
Somit ergibt sich das Minimierungsproblem

$$\min 4\pi r^2 + 8\pi r h \quad \text{u.d.N.} \quad \pi r^2 h = 10.$$

Offensichtlich muss $r > 0$ gelten, um die Nebenbedingung zu erfüllen. Setzt man diese in die Zielfunktion ein, so erhält man das Problem

$$\min J(r) = 4\pi r^2 + \frac{80}{r}.$$

Zur Berechnung der Lösung differenziert man die Zielfunktion nach r und erhält

$$\frac{\partial J}{\partial r}(r) = 8\pi r - \frac{80}{r^2}$$

Setzt man dies Null, so erhält man den kritischen Punkt

$$8\pi r - \frac{80}{r^2} = 0 \Longleftrightarrow r^3 = \frac{10}{\pi} \Longleftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}.$$

Bestimmt man die zweite Ableitung der Zielfunktion nach r und setzt den kritischen Punkt ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 J}{\partial r^2}(r) = 8\pi + \frac{160}{r^3} \quad \Rightarrow \frac{\partial^2 J}{\partial r^2}\left(\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\right) = 8\pi + \frac{160\pi}{10} = 24\pi > 0.$$

Daher ist $r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \approx 1.4710$ ein Minimum. Man erhält ferner $h = \frac{10}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$.

3) Seien AR, AS, AT, BR, BS, BT jeweils die Anzahl der LKW von Ausgangsort A bzw. B zum Ziel R, S bzw. T. Dann haben wir das folgende lineare Programm zu lösen:

$$\begin{array}{ll} \min & 5AR + 4AS + 9AT + 7BR + 8BS + 10BT \\ \text{u.d.N.} & AR + BR \geq 11, \quad AS + BS \geq 10, \quad AT + BT \geq 9, \quad \text{(Bedarf)} \\ & AR + AS + AT \leq 18, \quad BR + BS + BT \leq 12, \quad \text{(Vorrat)} \\ & AR \geq 0, AS \geq 0, AT \geq 0, BR \geq 0, BS \geq 0, BT \geq 0. \end{array}$$

Addiert man jeweils die 3 Bedarfsungleichungen und die beiden Vorratsungleichungen so folgt

$$AR + AS + AT + BR + BS + BT \geq 30 \quad \text{bzw.} \quad AR + AS + AT + BR + BS + BT \leq 30.$$

Daher müssen die 5 Ungleichungen jeweils mit Gleichheit erfüllt sein, es müssen also alle LKW fahren. Damit können wir mit den Bedarfsgleichungen 3 Variablen eliminiern:

$$BR = 11 - AR, \quad BS = 10 - AS, \quad BT = 9 - AT.$$

Setzen wir dies in die zweite Vorratsgleichung ein, so ergibt sich wieder die erste Vorratsgleichung, wir können also nur noch eine weitere Variable mittels

$$AT = 18 - AS - AR$$

eliminieren. Nun erhalten wir das lineare Programm (in zwei Variablen)

$$\begin{array}{rl}
\min & 5AR + 4AS + 9(18 - AS - AR) \\
 & +7(11 - AR) + 8(10 - AS) + 10(9 - (18 - AS - AR)) \\
\text{u.d.N.} & AR \geq 0, \quad AS \geq 0, \quad 18 - AS - AR \geq 0, \\
 & 11 - AR \geq 0, \quad 10 - AS \geq 0, \quad 9 - (18 - AS - AR) \geq 0.
\end{array}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{array}{rl}
\min & 229 - AR - 3AS \\
\text{u.d.N.} & AR \geq 0, \quad AS \geq 0, \quad AR + AS \leq 18, \quad AR \leq 11, \quad AS \leq 10, \quad AS + AR \geq 9.
\end{array}$$

Aus der Skizze liest man die Lösung $AR = 8, AS = 10$ ab. Insgesamt erhält man also die Lösung

$$AR = 8, \quad AS = 10, \quad AT = 0, \quad BR = 3, \quad BS = 0, \quad BT = 9.$$