Mathematik I

Vorlesung im Bachelorstudium BAU, EIT, LRT

Prof. Dr. Matthias Gerdts

Institut für Angewandte Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München (UniBw M)
matthias.gerdts@unibw.de
http://www.unibw.de/ingmathe

Vorlesung 19

Eigenwerte, Krümmung, Spur und Determinante

Inhalt und Ziele der Lehreinheit:

- Zusammenhang von Eigenwerten und Definitheit einer Matrix
- Zusammenhang von Eigenwerten und Spur und Determinante einer Matrix
- Eigenwertabschätzung nach Gerschgorin

Eigenwerte, Krümmung, Spur und Determinante

Definition

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch.

(a) A heißt positiv semidefinit, falls $\vec{x}^* A \vec{x} \geq 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ gilt. Analog wird negative Semidefinitheit definiert.

Eigenwerte, Krümmung, Spur und Determinante

Definition

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch.

(a) A heißt positiv semidefinit, falls $\vec{x}^* A\vec{x} \geq 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ gilt. Analog wird negative Semidefinitheit definiert.

(b) A heißt positiv definit, falls $\vec{x}^* A\vec{x} > 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq 0$, gilt. Analog wird negative Definitheit definiert.

Eigenwerte, Krümmung, Spur und Determinante

Definition

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch.

(a) A heißt positiv semidefinit, falls $\vec{x}^* A\vec{x} \geq 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ gilt. Analog wird negative Semidefinitheit definiert.

(b) A heißt positiv definit, falls $\vec{x}^* A\vec{x} > 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq 0$, gilt. Analog wird negative Definitheit definiert.

(c) A heißt indefinit, falls A weder positiv noch negativ semidefinit ist.

Eigenwerte, Krümmung, Spur und Determinante

Satz

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch.

(a) *A ist positiv semidefinit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A größer oder gleich Null sind.*

A ist negativ semidefinit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A kleiner oder gleich Null sind.

Eigenwerte, Krümmung, Spur und Determinante

Satz

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch.

(a) *A ist positiv semidefinit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A größer oder gleich Null sind.*

A ist negativ semidefinit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A kleiner oder gleich Null sind.

(b) *A ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A größer Null sind.*

A ist negativ definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A kleiner Null sind.

Eigenwerte, Krümmung, Spur und Determinante

Satz

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch.

(a) *A ist positiv semidefinit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A größer oder gleich Null sind.*

A ist negativ semidefinit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A kleiner oder gleich Null sind.

(b) *A ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A größer Null sind.*

A ist negativ definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A kleiner Null sind.

(c) *A ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren von A positiv sind.*

Entsprechend ist A negativ definit, falls alle Hauptminoren von $-A$ positiv sind.

Eigenwerte, Krümmung, Spur und Determinante

Unter den Hauptminoren einer $n \times n$-Matrix $A = [a_{ij}]$ versteht man dabei die Determinanten

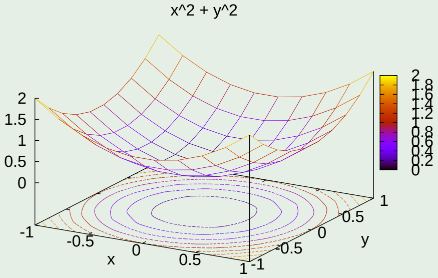
$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Eigenwerte, Krümmung, Spur und Determinante

Eigenwerte geben Auskunft über das Krümmungsverhalten von quadratischen Funktionen.

Beispiel (Krümmung und Eigenwerte)

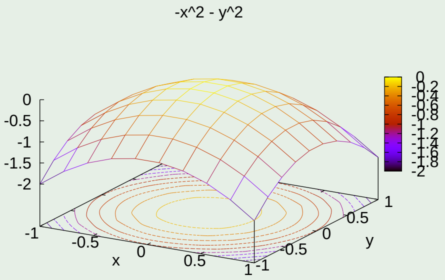
$f(x,y) = x^2 + y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (Matrix ist positiv definit, hat nur positive Eigenwerte):



Eigenwerte, Krümmung, Spur und Determinante

Beispiel (Krümmung und Eigenwerte)

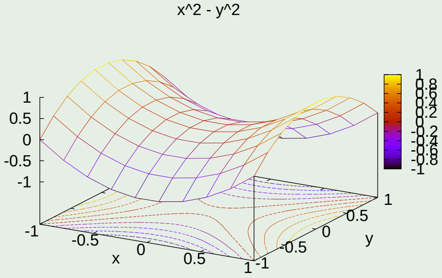
$$f(x,y) = -x^2 - y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ (Matrix ist negativ definit, hat nur negative Eigenwerte):



Eigenwerte, Krümmung, Spur und Determinante

Beispiel (Krümmung und Eigenwerte)

$f(x,y) = x^2 - y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (Matrix ist indefinit, hat positive und negative Eigenwerte):



Eigenwerte, Krümmung, Spur und Determinante

Definition (Spur)

Die Spur (engl. trace) einer $n \times n$-Matrix A ist definiert als die Summe ihrer Hauptdiagonalelemente, d.h.

$$\mathrm{Spur(A)} := \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Eigenwerte, Krümmung, Spur und Determinante

Satz

(a) *Die Summe aller Eigenwerte einer $n \times n$-Matrix A ist gleich der Spur von A, d.h.*

$$\mathit{Spur}(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Eigenwerte, Krümmung, Spur und Determinante

Satz

(a) *Die Summe aller Eigenwerte einer $n \times n$-Matrix A ist gleich der Spur von A, d.h.*

$$Spur(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

(b) *Das Produkt aller Eigenwerte ist gleich der Determinante einer $n \times n$-Matrix A, d.h.*

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Eigenwerte, Krümmung, Spur und Determinante

Satz

(a) *Die Summe aller Eigenwerte einer $n \times n$-Matrix A ist gleich der Spur von A, d.h.*

$$Spur(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

(b) *Das Produkt aller Eigenwerte ist gleich der Determinante einer $n \times n$-Matrix A, d.h.*

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

(c) *Die zu verschiedenen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren sind linear unabhängig.*

Eigenwertabschätzungen

Ziel:

Leite Schätzungen der Eigenwerte von A alleine mithilfe der Matrixeinträge in A ab.

Eigenwertabschätzungen

Satz (Gerschgorin)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gegeben. Definiere Radien r_i gemäß

$$r_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

und Kreisscheiben (Gerschgorin-Kreise) gemäß

$$K_i := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq r_i\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

Eigenwertabschätzungen

Satz (Gerschgorin)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gegeben. Definiere Radien r_i gemäß

$$r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

und Kreisscheiben (Gerschgorin-Kreise) gemäß

$$K_i := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq r_i\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(a) *Für jeden Eigenwert λ von A gilt*

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i.$$

Eigenwertabschätzungen

Satz (Gerschgorin)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gegeben. Definiere Radien r_i gemäß

$$r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

und Kreisscheiben (Gerschgorin-Kreise) gemäß

$$K_i := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq r_i \}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(a) *Für jeden Eigenwert λ von A gilt*

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i.$$

(b) *Sei U_1 die Vereinigung von m dieser Kreisscheiben und sei U_2 die Vereinigung der verbleibenden $n - m$ Kreisscheiben. Gilt $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, so enthält U_1 m Eigenwerte von A und U_2 $n - m$ Eigenwerte von A (Eigenwerte und Kreisscheiben sind entsprechend ihrer Vielfachheit zu zählen.).*

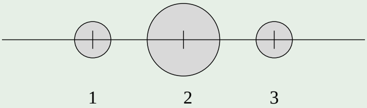
Eigenwertabschätzungen

Beispiel

Betrachte

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & -0.1 \\ 0 & 2 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Die Gerschgorin-Kreise



$$\begin{aligned} K_1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq 0.2\} \\ K_2 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \leq 0.4\} \\ K_3 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq 0.2\} \end{aligned}$$

sind paarweise disjunkt, d.h. in jedem Kreis liegt genau ein Eigenwert von A.

Eigenwertabschätzungen

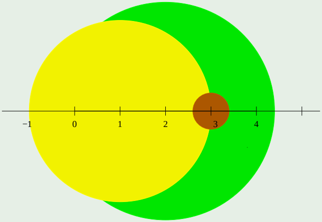
Beispiel

Für die symmetrische Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 3 \end{bmatrix}$$

überschneiden sich die Gerschgorin-Kreise

$$\begin{aligned} K_1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq 2\} \\ K_2 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \leq 2.4\} \\ K_3 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq 0.4\} \end{aligned}$$



Satz von Gerschgorin liefert die nur die Abschätzung

$$-1 \leq \boldsymbol{\lambda} \leq 4.4$$

für die Eigenwerte $\boldsymbol{\lambda}$ von B erhält. Beachte, dass die Eigenwerte von B reell sind, da B symmetrisch ist.

Aussagenlogik

Zusammenfassung:

- In dieser Lerneinheit werden einige nützliche Zusammenhänge zwischen Eigenwerten und anderen Größen einer Matrix hergestellt.
- Der Satz von Gerschgorin gibt eine einfache Möglichkeit an, um Eigenwerte abzuschätzen.

Thanks for your Attention!

Questions?

Further information:

matthias.gerdts@unibw.de
www.unibw.de/ingmathe
www.optimal-control.de