Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. Matthias Gerdts

Universität der Bundeswehr München

Herbsttrimester 2017

7. Übungsblatt Mathematik I

7.1 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform J der Matrix, sowie eine invertierbare Matrix T mit $J = T^{-1}AT$.

7.2 Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : [-1, 0] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - x^2$$

den Wertebereich und die Umkehrabbildung. Warum hat die Funktion f auf dem erweiterten Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$ keine Umkehrabbildung?

Lösungen

7.1 Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\varphi_A(\mu) &= \det(A-\mu I) = \det \begin{bmatrix} -\mu & 1 & 0 \\ 4 & 3-\mu & -4 \\ 1 & 2 & -1-\mu \end{bmatrix} \\
&= -\mu(3-\mu)(-1-\mu) - 4 - 4(-1-\mu) - 8\mu \\
&= -\mu(-3-2\mu+\mu^2) - 4\mu \\
&= -\mu(\mu^2-2\mu+1) \\
&= -\mu(\mu-1)^2
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir den Eigenwert $\lambda_1 = 0$ mit algebraischer Vielfachheit 1, und den Eigenwert $\lambda_2 = 1$ mit der algebraischen Vielfachheit 2, als Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Aus

$$\vec{0} = (A - 0I)\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ 4v_1 + 3v_2 - 4v_3 \\ v_1 + 2v_2 - v_3 \end{bmatrix}$$

erhalten wir $v_2 = 0$ und $v_1 = v_3$. Daher ist

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$. Aus

$$\vec{0} = (A - 1 \cdot I)\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 + v_2 \\ 4v_1 + 2v_2 - 4v_3 \\ v_1 + 2v_2 - 2v_3 \end{bmatrix}$$

erhalten wir $v_1 = v_2$ und $v_3 = \frac{3}{2}v_1$. Somit ist der Lösungsraum eindimensional, d.h. die geometrische Vielfachheit von $\lambda_2 = 1$ ist 1. Wir erhalten

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

als einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$. Die Matrix A ist nicht diagonalisierbar, aber die Jordan'sche Normalform ist

$$J = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Zur Bestimmung der Matrix T benötigen wir, da die algebraische Vielfachheit größer ist als die geometrische einen Hauptvektor, d.h. wir lösen noch $(A - \lambda_2 I)\vec{v_3} = \vec{v_2}$. Hierzu verwenden wir das Gauss'sche Eliminationsverfahren:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right] \overset{\substack{II+4I \\ III+I}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -4 & 10 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right] \overset{III-0.5II}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Wählen wir die dritte Komponente beliebig, so erhalten wir durch Rückwärtssubstitution die Hauptvektoren

$$\left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{10+4\alpha}{6} - 2 \\ \frac{10+4\alpha}{6} \\ \alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Wir wählen einen Hauptvektor, z.B. für $\alpha = 2$

$$\vec{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Für die Matrix

$$T := \begin{bmatrix} \vec{v_1} & \vec{v_2} & \vec{v_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

gilt nun

$$\det(T) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 4 + 6 - 2 - 9 = -1 \neq 0,$$

sie ist also regulär, und es gilt $J = T^{-1}AT$, wegen

$$TJ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = AT.$$

7.2 Aus einer Skizze erkennen wir folgendes: Für $x \in [-1, 0]$ ist $f(x) = 1 - x^2 \in [0, 1]$. Wegen $f(0) = 1$ und $f(-1) = 0$ und da die Funktion auf $[-1, 0]$ monoton ist, ist der Wertebereich $W = [0, 1]$. Zur Bestimmung der Umkehrfunktion setzen wir

$$y = f(x) = 1 - x^2.$$

Wegen $y \in W = [0, 1]$ ist $1 - y \geq 0$ und wir erhalten

$$y = 1 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 - y \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{1 - y}.$$

Wegen $x \in [-1, 0]$ muss

$$x = -\sqrt{1-y}$$

sein. Wir finden also zu jedem $y \in W$ ein eindeutiges $x \in [-1, 0]$, so dass x im Urbild von y liegt, d.h. $f(x) = y$ gilt. Damit ist die Funktion

$$f^{-1} : [0, 1] \to [-1, 0], \quad f^{-1}(y) = -\sqrt{1-y}$$

die Umkehrfunktion von f.

Definieren wir

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - x^2$$

so gilt

$$f(1) = 0 = f(-1),$$

die Urbildmenge zum Wert $y = 0$ enthält also mindestens zwei verschiedene Werte und damit existiert keine Umkehrfunktion.