Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. Matthias Gerdts

Universität der Bundeswehr München

Herbsttrimester 2017

6. Übungsblatt Mathematik I

6.1 Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Was kann man hieraus für die Invertierbarkeit der Matrix folgern?

6.2 Gegeben sei die für $\alpha \in \mathbb{R}$ definierte Matrix

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix M_α sowie deren algebraische Vielfachheit in Abhängigkeit von α.

(b) Bestimmen Sie für $\alpha \neq 1$ die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte.

(c) Bestimmen Sie für $\alpha = 1$ eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert 1.

6.3 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finden Sie eine Matrix B, die dieselbe Determinante, und dieselben Eigenwerte wie A hat, die aber nicht ähnlich zu A ist.

6.4 Bestimmen Sie die Eigenwerte und normierte Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie damit eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

6.K Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie zunächst, dass $\lambda_3 = 0$ ein Eigenwert von A ist. Finden Sie die übrigen beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2, wobei die Bezeichnung so zu wählen ist, dass $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Begründen Sie dass A diagonalisierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zu λ_3 ist. Berechnen Sie jeweils alle Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2. Wählen Sie unter diesen unendlich vielen Eigenvektoren die Eigenvektoren $\vec{v}_i, i = 1, 2$, so dass jeweils der erste Eintrag 1 ist.

(c) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D mit Diagonalelementen $d_{11} \geq d_{22} \geq d_{33}$ und eine invertierbare Matrix T mit $T^{-1}AT = D$. Überprüfen Sie Ihre Rechnung, ohne dabei T^{-1} explizit zu berechnen.

Lösungen

6.1 Wir entwickeln nach der 1. Zeile und verwenden dann die Regel von Sarrus

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 2\det\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix} - 1\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} - 1\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \\
&= 2(-4-10+21-20+7+6) - (4-8+21-16-7+6) \\
&\quad +(3-4+15-12-5+3) - (21-16-30+24-20+21) \\
&= 0-0-0-0 = 0
\end{aligned}$$

Wegen $\det(A) = 0$ ist die Matrix A singulär, also nicht invertierbar.

6.2 (a) Wir berechnen das charakteristische Polynom, wobei wir die Determinante nach der 1.Spalte entwickeln:

$$\varphi_{M_\alpha}(\mu) = \det(M_\alpha - \mu I) = \det\begin{bmatrix} 1-\mu & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\mu & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \alpha-\mu \end{bmatrix} = (1-\mu)^3(\alpha-\mu).$$

Ist $\alpha \neq 1$ hat der Eigenwert α algebraische Vielfachheit 1, und den Eigenwert 1 algebraische Vielfachheit 3. Für $\alpha = 1$ haben wir den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 4.

(b) Sei $\alpha \neq 1$. Dann ist die geometrische Vielfacheit des Eigenwertes α gleich 1, da sie immer mindestens 1 ist und kleiner gleich der algebraischen Vielfachheit sein muss. Für den Eigenwert 1 betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (M_\alpha - 1 \cdot I)\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \alpha-1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Hieraus erkennt man direkt, dass $x_1 \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann (1. Spalte lauter 0 Einträge). Ferner ist $x_2 = 0$ (3. Zeile) und damit $x_4 = 0$ (4. Zeile) und schließlich $x_3 = 0$ (1. Zeile). Der Eigenraum ist somit eindimensional und daher ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 1 gleich 1.

(c) Für $\alpha = 1$ müssen alle Eigenvektoren das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (M_1 - 1 \cdot I)\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}$$

erfüllen. Wir erkennen, dass $v_2 = 0$ und damit $v_4 = -v_3$ gelten muss. Nun können v_1 und v_3 beliebig gewählt werden, und wir erhalten einen zweidimensionalen Eigenraum. Zwei linear unabhängige Eigenvektoren bilden eine Basis, also sind z.B.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert 1 für $\alpha = 1$.

6.3 Es ist $\det(A) = 0$, und 0 ist Eigenwert mit der algebraischen Vielfachheit 2. Aus

$$\vec{0} = (A - 0I)\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sieht man, dass der Eigenraum

$$\{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = 0\}$$

zum Eigenwert 0 nur eindimensional ist, d.h. wir haben die geometrische Vielfachheit 1. Wählen wir nun die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

so hat diese ebenfalls $\det(B) = 0$ und den Eigenwert 0 mit algebraischer Vielfachheit 2, aber die geometrische Vielfachheit ist hier 2. Es gilt für jede invertierbare Matrix T:

$$T^{-1}BT = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq A,$$

und somit sind A und B nicht ähnlich. *Bemerkung: Es sind auch noch die Spuren der Matrizen gleich.*

6.4 Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Mit der quadratischen Lösungsformel erhält man die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3.$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = (A - 2I)\vec{v} = \begin{bmatrix}2 & 2\\-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$$

Es muss also $v_1 = -v_2$ sein, und da wir einen normierten Eigenvektor suchen, ist dieser bis auf das Vorzeichen eindeutig und es gilt

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}.$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = (A - 3I)\vec{v} = \begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$$

Es muss also $v_1 = -2v_2$ sein. Ein normierter Eigenvektor ist

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\-\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}.$$

Setzen wir

$$T := \begin{bmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

so gilt

$$D := \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} = T^{-1}AT,$$

denn multipliziert man beide Seiten mit T so erhält man $TD = AT$ und spaltenweise gelesen sind dies genau die Eigenwertgleichungen $2\vec{v}_1 = A\vec{v}_1$ bzw. $3\vec{v}_2 = A\vec{v}_2$.

6.K (a) Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix}2-\lambda & -1 & 0\\-3 & 4-\lambda & 0\\0 & 0 & -\lambda\end{bmatrix}\\ &= -\lambda(2-\lambda)(4-\lambda) + 3\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-5).\end{aligned}$$

Die drei Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ sind die Eigenwerte von A. *Bemerkung: Statt der Faktorisierung kann man auch die quadratische Lösungsformel verwenden.* Da A drei verschiedene Eigenwerte hat, ist jeweils algebraische und geometrische Vielfachheit gleich 1. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer linear unabhängig sind, gibt es eine Basis aus Eigenvektoren und somit ist A diagonalisierbar.

(b) Es gilt

$$A\vec{v_3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

also ist $\vec{v_3}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 0$. Alle Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$ erfüllen

$$\vec{0} = (A - 5I)\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Hieraus folgt $x_3 = 0$ und $x_2 = -3x_1$. Also sind alle Eigenvektoren in der Menge

$$\left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ -3a \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Alle Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ erfüllen

$$\vec{0} = (A - I)\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Hieraus folgt $x_3 = 0$ und $x_1 = x_2$. Also sind alle Eigenvektoren in der Menge

$$\left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Speziell, wenn der erste Eintrag 1 sein soll, erhalten wir

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Wir wählen die Diagonalelemente von D als Eigenwerte von A und die Spalten von T als Eigenvektoren, d.h.

$$D := \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad T := \begin{bmatrix} \vec{v_1} & \vec{v_2} & \vec{v_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$AT = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -15 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{und}$$

$$TD = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -15 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

also $AT = TD$. Da T invertierbar ist (Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig), gilt wie behauptet $T^{-1}AT = T^{-1}TD = D$.