Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. Matthias Gerdts

Universität der Bundeswehr München

Herbsttrimester 2017

4. Übungsblatt Mathematik I

4.1 Sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ jeweils linear unabhängig? Lässt sich jeder Vektor des $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination der Vektoren darstellen? Falls nicht, finden Sie einen für den dies nicht möglich ist! Bilden die Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(a) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix}3\\4\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\4\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\8\\5\end{bmatrix}$

4.2 Es sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ und $x = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume des $\mathbb{R}^n$?

(a) $U_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 1\}$

(b) $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$

(c) $U_3 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 - 2x_2 = 0\}$

(d) $U_4 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_2 = 0\}$

(e) $U_5 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \cdot x_2 = 0\}$

(f) $U_6 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_2 = 0\}$

4.3 Berechnen Sie alle möglichen Matrixprodukte der 3 folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 1\\-2 & 3\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix}0 & 4 & 2 & 1\end{bmatrix}^\top.$$

4.4 Gegeben seien die für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$ definierten Matrizen

$$A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad B := \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie das Matrixprodukt AB. Was folgt daraus für die Matrizen A und B?

4.5 Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabe 4.4 die Lösung der Gleichung $AX + A^\top X = B$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

4.K Wir betrachten zwei Ebenen E_1 und E_2 im dreidimensionalen reellen Raum. Die beiden Ebenen seien gegeben in Parameterdarstellung:

$$E_1 = \{\vec{x} = \vec{p} + t_1\vec{r}_1 + t_2\vec{r}_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit} \quad \vec{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \{\vec{x} = \vec{q} + t_1\vec{\rho}_1 + t_2\vec{\rho}_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit} \quad \vec{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{\rho}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{\rho}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Kreuzprodukte $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ und $\vec{\rho}_1 \times \vec{\rho}_2$.

(b) Geben Sie die Ebene E_2 in Hesse'scher Normalform an. Benutzen Sie dabei den angegebenen Ortsvektor $\vec{q}$ und vereinfachen Sie soweit wie möglich. Erinnern Sie sich an die Vorzeichenkonvention für den Normalenvektor.

(c) Bestimmen Sie einen Normalenvektor zur Ebene E_1. Geben Sie den Schnittwinkel ϕ zwischen den beiden Ebenen E_1 und E_2 an.

Lösungen

4.1 (a) Für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0,$$

also sind die Vektoren nach Definition linear unabhängig.
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ lässt sich nicht als Linearkombination der beiden Vektoren darstellen, denn jede Linearkombination der beiden Vektoren hat die Form $\begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$, und somit müsste $1 = \lambda_2 = 2$ gelten, ein Widerspruch. Damit sind die Vektoren auch keine Basis. *Für eine Basis braucht man drei linear unabhängige Vektoren!*

(b) Für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0,$$

also sind die Vektoren nach Definition linear unabhängig. Ferner gilt

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

und somit $\lambda_3 = v_3, \lambda_2 = v_2 - v_3, \lambda_1 = v_1 - v_3$. Also ist jeder Vektor des $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination darstellbar. Die drei linear unabhängigen Vektoren bilden somit eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Alternativ kann man auch andersherum argumentieren: Drei linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$ bilden immer eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Damit muss, nach Definition einer Basis, jeder Vektor als Linearkombination der Basisvektoren darstellbar sein.

(c) Für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_2 - \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \lambda_3, \lambda_1 = -\lambda_3.$$

Somit gibt es, z.B. mit $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$, eine nichttriviale Linearkombination, die den Nullvektor ergibt, also sind die 3 Vektoren linear abhängig, damit insbesondere auch keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ lässt sich nicht als Linearkombination der beiden Vektoren darstellen, da sonst in den letzten beiden Komponenten $(\lambda_3 - \lambda_2) = 1 = \lambda_2 - \lambda_3 = -(\lambda_3 - \lambda_2) = -1$ gelten müsste, was aber ein Widerspruch ist.

(d) 4 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind immer linear abhängig, und sind daher keine Basis. Um jeden Vektor darstellen zu können, müssten drei der Vektoren linear unabhängig sind. Da der Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ kein Vielfaches des Vektors $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ ist, sind die ersten beiden Vektoren linear unabhängig. Der dritte und der vierte Vektor sind jeweils linear abhängig von den ersten beiden, denn es gilt

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Damit sind alle Vektoren, die Linearkombination der vier Vektoren sind, bereits Linearkombination der ersten beiden Vektoren. Der Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ lässt sich nicht als Linearkombination der Vektoren darstellen, denn es müsste gelten:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\lambda_1 + \lambda_2 \\ 4\lambda_1 \\ 7\lambda_1 + 3\lambda_2 \end{bmatrix},$$

und somit wäre $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ wegen der letzten beiden Komponenten, aber dies führt zum Widerspruch $1 = 0$ in der ersten Komponente.

4.2 (a) $U_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 1\}$ ist kein Unterraum, da es in U_1 kein Nullelement gibt, d.h. $0 \notin U_1$.

(b) $U_2 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$ ist kein Unterraum, da für $x \in U_2$ mit $x_1 = 1$ und $\lambda = -1$ gilt $\lambda x_1 = -1 < 0$, also $\lambda x \notin U_2$.

(c) $U_3 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 - 2x_2 = 0\}$ ist ein Unterraum, denn es gelten die beiden Eigenschaften aus Satz 2.2.10:

Seien $x, y \in U_3$, d.h. es gilt $x_1 - 2x_2 = 0$ und $y_1 - 2y_2 = 0$, und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann ist $x_1 + y_1 - 2(x_2 + y_2) = 0$, d.h. $x + y \in U_3$.

Ferner ist $\lambda x_1 - 2\lambda x_2 = \lambda(x_1 - 2x_2) = 0$, also $\lambda x \in U_3$.

(d) $U_4 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_2 = 0\}$ ist kein Unterraum, denn es gilt:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in U_4 \text{ und } y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in U_4 \text{ aber } x + y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \notin U_4.$$

(e) $U_5 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \cdot x_2 = 0\}$ ist nach (d) kein Unterraum, denn es ist $U_5 = U_4$.

(f) $U_6 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_2 = 0\}$ ist ein Unterraum, denn es gelten die beiden Eigenschaften aus Satz 2.2.10:

Seien $x, y \in U_6$, d.h. $x_1 = 0 = x_2$ und $y_1 = 0 = y_2$, und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann ist $x_1 + y_1 = 0 = x_2 + y_2$, d.h. $x + y \in U_6$.

Ferner gilt $\lambda x_1 = 0$ und $\lambda x_2 = 0$, also $\lambda x \in U_6$.

4.3 Auf Grund der Dimensionen kann man nur in einer Reihenfolge multiplizieren:

$$CBA = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 12 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -12 & 40 \\ -6 & 20 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

4.4

$$AB = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & -ab + ab \\ cd - cd & -bc + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit sind die Matrizen A und B invers zueinander. Wir haben also eine Formel für die Inversenberechnung einer 2×2 Matrix. *Die Bedingung $Det(A) = ad - bc \neq 0$ sichert dabei, dass die Matrix auch invertierbar ist.*

4.5 Es gilt

$$B = AX + A^\top X = (A + A^\top)X.$$

Wir berechnen die Matrix

$$A + A^\top = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Für diese Matrix gilt nach der vorherigen Aufgabe $6 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 3 \neq 0$ also ist die Inverse gegeben durch

$$(A + A^\top)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

und es folgt

$$X = (A + A^\top)^{-1} B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/3 & -5/3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

4.K (a)

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\vec{\rho}_1 \times \vec{\rho}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

(b) Ein Normalenvektor der Ebene E_2 ist gegeben durch

$$\vec{n}_2 = \frac{\rho_1 \times \rho_2}{\|\rho_1 \times \rho_2\|} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wegen $\vec{q} \in E_2$ ist die Hesse'sche Normalform der Ebene E_2

$$E_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{n}_2, \vec{x} - \vec{q} \rangle = 0\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 - 3 = 0\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 3\}.$$

Wegen

$$\langle \vec{n}_2, \vec{q} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = 3 \geq 0$$

ist die Vorzeichenkonvention für den Normalenvektor erfüllt.

(c) Ein Normalenvektor zu E_1 ist

$$\vec{n}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Für den Schnittwinkel ϕ zwischen beiden Ebenen E_1 und E_2 gilt dann

$$\cos\phi = \frac{\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Damit gilt $\phi = \frac{\pi}{4}$.