Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. Matthias Gerdts

der Bundeswehr Universität München

Herbsttrimester 2017

3. Übungsblatt Mathematik I

3.1 Bestimmen Sie von den folgenden komplexen Zahlen jeweils Realteil, Imaginärteil und die Polarkoordinatenform:

(a) $\frac{1-2i}{3-4i}$

(b) $\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i+1}$

(c) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$

3.2 Bestimmen Sie in $\mathbb{C}$ alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

(a) $z^2 + \overline{z} = -1$

(b) $z^4 = 8 + 8\sqrt{3}i$

(c) $z^4 + 2\sqrt{5}z^2 - 4 = 0$

3.3 Gegeben seien die Punkte

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{z}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie den Winkel bei $\vec{z}_t$ im Dreieck $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_t$ in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

(b) Für welche Punkte $\vec{z}_t$ ist das Dreieck rechtwinklig?

(c) Bestimmen Sie die Hesse'sche Normalform der Ebene in der das Dreieck $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_t$ liegt.

(d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_t$ und zeigen Sie damit, dass dieser unabhängig von t ist.

(e) Liegen die 4 Punkte $\vec{w}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ in einer Ebene?

3.K (a) Geben Sie den Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = \frac{1}{i} + \frac{5i}{1-2i}$ an.

(b) Berechnen Sie den Betrag der komplexen Zahl $z = \frac{1+7i}{1-7i}$.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$2z + z\overline{z} = i.$$

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^4 - 5z^2 - 36 = 0.$$

Lösungen

3.1 (a) Durch Erweitern mit dem komplex-konjugierten des Nenners erhalten wir

$$z = \frac{1-2i}{3-4i} = \frac{(1-2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3-8i^2-6i+4i}{25} = \frac{11}{25} - \frac{2}{25}i.$$

Damit ist $Re(z) = \frac{11}{25}, Im(z) = -\frac{2}{25}$. Für die Polarkoordinatenform bestimmen wir

$$r = |z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{\frac{11^2}{25^2} + \frac{(-2)^2}{25^2}} = \sqrt{\frac{125}{625}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Ferner gilt für den Winkel des komplexen Vektors $\vec{z}$ zur reellen Achse

$$\tan(\varphi) = \frac{Im(z)}{Re(z)} = \frac{-\frac{2}{25}}{\frac{11}{25}} = -\frac{2}{11}.$$

Da $Re(z) > 0$ und $Im(z) < 0$, ist $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Unter Ausnutzung der 2π-Periodizität der komplexen Exponentialfunktion erhalten wir durch Addition von 2π

$$Arg(z) = 2\pi + \arctan\left(-\frac{2}{11}\right).$$

Damit ist die Polarkoordinatenform

$$\begin{aligned} z &= |z|e^{iArg(z)} = r(\cos(Arg(z)) + i\sin(Arg(z))) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\cos\left(2\pi + \arctan\left(-\frac{2}{11}\right)\right) + i\sin\left(2\pi + \arctan\left(-\frac{2}{11}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

(b) Wir erweitern zunächst die einzelnen Brüche und fassen anschließend zusammen:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i+1} \\ &= \frac{-i}{i(-i)} + \frac{i+1}{(i-1)(i+1)} + \frac{i-1}{(i+1)(i-1)} \\ &= -i - \frac{i+1}{2} - \frac{i-1}{2} \\ &= -2i = 0 + (-2)i \end{aligned}$$

Somit ist $Re(z) = 0$ und $Im(z) = -2$. Der Betrag ist $|z| = 2$ und für den Winkel finden wir durch geometrische Überlegung $\frac{3\pi}{2}$. *Man beachte, dass man den Winkel hier nicht über den Tangens berechnen kann, da der Realteil Null ist.* Damit ist die Polarkoordinatenform

$$z = 2e^{\frac{3}{2}\pi i} = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

(c) Es gilt wegen $1 = i^4 = i^{2016}$

$$z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017} = \left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^{2017} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{2017} = i^{2017} = i \cdot i^{2016} = i.$$

Also ist $Re(z) = 0, Im(z) = 1$ und damit gilt

$$z = e^{\frac{1}{2}\pi i} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

3.2 (a) Wir setzen $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und erhalten

$$\begin{aligned} -1 + 0i &= -1 = z^2 + \overline{z} = (a+bi)^2 + \overline{(a+bi)} \\ &= a^2 - b^2 + 2abi + (a - bi) \\ &= (a^2 - b^2 + a) + (2ab - b)i. \end{aligned}$$

Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich wenn ihr Real- und ihr Imaginärteil gleich sind. Somit folgt

$$-1 = a^2 - b^2 + a \quad \wedge \quad 0 = 2ab - b.$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir entweder $b = 0$ oder $a = \frac{1}{2}$. Im Fall $b = 0$ folgt aus der ersten Gleichung $a^2 + a + 1 = 0$ was nur die beiden komplexen Lösungen

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \notin \mathbb{R}$$

hat. Im Fall $a = \frac{1}{2}$ folgt

$$-1 = \frac{1}{4} - b^2 + \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad b = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Damit sind die Lösungen der Gleichung

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i \quad \text{und} \quad z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i.$$

(b) Wir setzen $z = re^{i\varphi}$ und bestimmen zunächst den Betrag der rechten Seite:

$$|8 + 8\sqrt{3}i| = \sqrt{8^2 + 8^2 \cdot 3} = 16.$$

Nun bestimmen wir die Polarkoordinatenform der rechten Seite:

$$8 + 8\sqrt{3}i = 16\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 16\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 16e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

Hierbei haben wir verwendet, dass die Lösung von $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$ und $\sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bekanntlich $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ist. Wissen wir dies nicht, so berechnen wir den Winkel mittels

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

Nun folgt

$$16e^{\frac{\pi}{3}i} = 8 + 8\sqrt{3}i = z^4 = r^4 e^{4i\varphi}.$$

und unter Verwendung von $e^{2\pi i} = 1$ und $r \in \mathbb{R}^+$ erhalten wir

$$r^4 = 16 \wedge 4\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad r = 2 \wedge \varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Wiederum wegen der Periodizität $e^{2\pi i} = 1$ genügt es vier aufeinanderfolgende Werte von $k \in \mathbb{Z}$ zu wählen, also z.B. $k = 0, 1, 2, 3$. Damit ergeben sich 4 Lösungen

$$\{2e^{\frac{\pi}{12}i}, 2e^{\frac{7\pi}{12}i}, 2e^{\frac{13\pi}{12}i}, 2e^{\frac{19\pi}{12}i}\}.$$

(c) Wir substituieren $w = z^2$ und erhalten

$$w^2 + 2\sqrt{5}w - 4 = 0.$$

Mittels der Lösungsformel für quadratische Gleichungen folgt

$$w_{1,2} = \frac{-2\sqrt{5} \pm \sqrt{20+16}}{2} = -\sqrt{5} \pm 3.$$

Rücksubstitution liefert die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} z^2 = 3 - \sqrt{5} \quad &\Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{3 - \sqrt{5}}, \\ z^2 = -3 - \sqrt{5} \quad &\Leftrightarrow \quad z = \pm i\sqrt{3 + \sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir vier Lösungen

$$\left\{\pm\sqrt{3-\sqrt{5}}, \pm i\sqrt{3+\sqrt{5}}\right\}.$$

3.3 (a) Nach Definition ist der Winkel bei $\vec{z}_t$ der Winkel zwischen den Richtungsvektoren der Seiten des Dreiecks und damit gilt:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) \quad &:= \quad \frac{\langle \vec{x} - \vec{z}_t, \vec{y} - \vec{z}_t\rangle}{\|\vec{x} - \vec{z}_t\| \, \|\vec{y} - \vec{z}_t\|} = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 3-t \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3-t \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 3-t \\ 1 \end{bmatrix} \right\| \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ -3-t \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} \\ &= \quad \frac{4 - (9 - t^2) + 1}{\sqrt{4 + (3-t)^2 + 1}\sqrt{4 + (-3-t)^2 + 1}} = \frac{t^2 - 4}{\sqrt{14 - 6t + t^2}\sqrt{14 + 6t + t^2}} \\ &= \quad \frac{t^2 - 4}{\sqrt{(14 + t^2 - 6t)(14 + t^2 + 6t)}} = \frac{t^2 - 4}{\sqrt{196 + t^4 + 28t^2 - 36t^2}} \\ &= \quad \frac{t^2 - 4}{\sqrt{180 + 16 + t^4 - 8t^2}} = \frac{t^2 - 4}{\sqrt{180 + (t^2 - 4)^2}}. \end{aligned}$$

Damit ist der Winkel

$$\varphi = \arccos\left(\frac{t^2-4}{\sqrt{180+(t^2-4)^2}}\right).$$

(b) Das Dreieck ist rechtwinklig bei $\vec{z}_t$, wenn

$$0 = \cos(\varphi) \qquad \Leftrightarrow \qquad t^2 - 4 = 0,$$

also für $t = \pm 2$, und somit für $\vec{z}_{-2} = [0, -2, 0]^\top$ und für $\vec{z}_2 = [0, 2, 0]^\top$. Ferner ist das Dreieck rechtwinklig bei x, wenn

$$0\langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{z}_t - \vec{x}\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ t-3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = -6(t-3),$$

also für $t = 3$ und somit $\vec{z}_3 = [0, 3, 0]^\top$. Das Dreieck ist rechtwinklig bei y, wenn

$$0\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{z}_t - \vec{y}\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ t+3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = 6(t+3),$$

also für $t = -3$ und somit $\vec{z}_{-3} = [0, -3, 0]^\top$.

(c) Für die Hesse'sche Normalform benötigt man den Normalenvektor auf der von den Seiten des Dreiecks aufgespannten Ebene. Diesen berechnen wir über das Kreuzprodukt:

$$(\vec{x} - \vec{z}_t) \times (\vec{y} - \vec{z}_t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3-t \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -3-t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Dieser ist noch zu normieren, d.h. wir berechnen

$$\left\| \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{36 + 144} = 6\sqrt{5}.$$

Damit erhalten wir den Normalenvektor

$$\vec{n} = \frac{1}{6\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Da der Punkt $\vec{z}_t$ in der Ebene liegt, und

$$c = \langle \vec{n}, \vec{z}_t \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

gilt, hat der Normalenvektor nach Konvention das richtige Vorzeichen. *Wäre die Konstante $c < 0$ so müsste man nach Konvention den Vektor $-\vec{n}$ nehmen.* Wir erhalten die Hesse'sche Normalform der Ebene

$$\left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \middle| \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{v} - \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \right\} = \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \middle| \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{v} \right\rangle = 0 \right\}.$$

(d) Der Flächeninhalt des Dreiecks ist mit dem soeben berechneten Normalenvektor

$$F = \frac{1}{2} \|(\vec{x} - \vec{z}_t) \times (\vec{y} - \vec{z}_t)\| = \frac{1}{2} 6\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Der Flächeninhalt ist also unabhängig von t. Man könnte auch die Formel

$$F = \frac{1}{2} \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$$

verwenden, und man sieht, dass die Grundseite $\vec{x}, \vec{y}$ parallel zu $\vec{z}_t$ und damit die Höhe konstant ist.

(e) *1.Lösungsweg:* Aus der Hesse'schen Normalform des Ebene durch $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_t$ erkennen wir, dass die Konstante $c = 0$ ist, d.h. die Ebene geht durch den Nullpunkt. Damit liegt der Nullvektor $\vec{w}$ ebenfalls in dieser Ebene und zwar für alle $t \in \mathbb{R}$.

2.Lösungsweg: Wir setzen $\vec{w}$ in die Hesse'schen Normalform des Dreiecks $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_t$ ein und erhalten

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{w} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0.$$

Also liegt auch $\vec{w}$ in der Ebene und zwar für alle $t \in \mathbb{R}$.

3.Lösungsweg (ohne Hesse'sche Normalform): Alle Punkte der von $\vec{w}, \vec{x}, \vec{y}$ aufgespannten Ebene lassen sich für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ darstellen in der Parameterform

$$\vec{w} + \lambda_1(\vec{x} - \vec{w}) + \lambda_2(\vec{y} - \vec{w}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Damit $\vec{z}_t$ ebenfalls in dieser Ebene liegt muss also

$$\vec{z}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}$$

gelten. Die erste und letzte Gleichung liefern jeweils $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, also $\lambda_2 = -\lambda_1$. Dies in die zweite Gleichung eingesetzt liefert

$$t = 3\lambda_1 - 3\lambda_2 = 6\lambda_1 \qquad \Rightarrow \lambda_1 = \frac{t}{6}.$$

Damit gilt

$$\vec{z}_t = \vec{w} + \frac{t}{6}(\vec{x} - \vec{w}) - \frac{t}{6}(\vec{y} - \vec{w}),$$

also liegen die 4 Punkte $\vec{w}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ in einer Ebene.

3.K (a)

$$z = \frac{1}{i} + \frac{5i}{1-2i} = -i + \frac{5i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = -i + i - 2 = -2 + 0i$$

Also gilt $Re(z) = -2, Im(z) = 0$.

(b) Da für alle $w \in \mathbb{C}$ stets $|w| = |\bar{w}|$ gilt, folgt direkt

$$|z| = \frac{|1+7i|}{|1-7i|} = \frac{|1+7i|}{|\overline{1-7i}|} = 1.$$

Alternativ berechnet man

$$|z|^2 = z\bar{z} = \frac{1+7i}{1-7i}\,\frac{1-7i}{1+7i} = 1,$$

und erhält dann $|z| = 1$.

(c) Wir setzen $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und erhalten

$$0 + 1i = i = 2z + z\bar{z} = 2(a+bi) + (a+bi)(a-bi) = (a^2 + b^2 + 2a) + 2bi.$$

Dies führt auf die reellen Gleichungen

$$a^2 + b^2 + 2a = 0 \qquad \text{und} \qquad 2b = 1.$$

Damit erhalten wir $b = \frac{1}{2}$ und dies eingesetzt ergibt

$$a^2 + 2a + \frac{1}{4} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-1}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Damit haben wir die beiden Lösungen

$$z_1 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \qquad \text{und} \qquad z_2 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

(d) Wir substituieren $w = z^2$ und erhalten

$$0 = w^2 - 5w - 36 = (w-9)(w+4).$$

Sieht man die Faktorisierung nicht, kann man die Nullstellen auch über die quadratische Lösungsformel bestimmen:

$$w_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 36}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2},$$

also $w = 9$ oder $w = -4$. Durch Resubstitution folgt nun

$$z^2 - 9 = 0 \quad \text{oder} \quad z^2 + 4 = 0.$$

Damit gilt $z \in \{\pm 3, \pm 2i\}$.