Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. Matthias Gerdts

Universität der Bundeswehr München

Herbsttrimester 2017

2. Übungsblatt Mathematik I

2.1 Bestimmen Sie eine Formel zur Berechnung der folgenden Gewinnwahrscheinlichkeiten beim Lotto 6 aus 49:

(a) Genau k Richtige für $1 \leq k \leq 6$.

(b) Einen Gewinn, also mindestens 3 Richtige.

2.2 Berechnen Sie den für $n \in \mathbb{N}$ definierten Ausdruck

$$A := \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

Tipp: Binomiallehrsatz

2.3 Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

(a) $\sum\limits_{k=1}^{4} \sum\limits_{i=1}^{k} ik$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{10} \sum\limits_{i=1}^{10} ik$

(c) $\sum\limits_{k=1}^{10} \sum\limits_{i=1}^{10} (i+k)$

2.4 Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \neq 1$.

2.5 Wir definieren die folgenden Mengen:

F : Die Menge alle Fische in einem Fluss

L : Die Menge der Leckerellen im Fluss

E : Die Menge der Ekelitzen im Fluss

U : Die Menge der ungenießbaren Fische im Fluss

G : Die Menge der gelben Fische im Fluss

B : Die Menge der blauen Fische im Fluss

M_a : Die Teilmenge aller Fische, die höchstens a Gramm wiegen.
Es gilt $M_a \subseteq M_b$ für $a < b$.

Übersetzen Sie mit Hilfe dieser Definitionen die folgenden Voraussetzungen in mengentheoretische Aussagen:

In einem Fluss gibt es genau zwei Fischarten, Leckerellen und Ekelitzen, deren erste eine ausgesprochene Delikatesse, deren zweite jedoch ungenießbar ist. Es ist bekannt, dass jeder gelbe Fisch eine Ekelitze ist, dass jede Leckerelle höchstens 500g wiegt und dass jede Ekelitze mehr als 300g wiegt.

Beschreiben Sie nun die nachstehenden Aussagen durch mengentheoretische Aussagen.

(a) Es gibt gelbe Fische im Fluss.

(b) Es gibt Fische in dem Fluss, die höchstens 500g wiegen.

(c) Es gibt Fische im Fluss, die höchstens 500g wiegen und nicht gelb sind.

(d) Alle gelben Fische im Fluss wiegen mehr als 500g.

(e) Alle Fische im Fluss, die schwerer sind als 800g, sind ungenießbar.

(f) Alle Fische im Fluss, die höchstens 400g wiegen, sind genießbar.

(g) Jeder gelbe Fisch im Fluss, der höchstens 200g wiegt, ist blau.

2.6 Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

2.7 Bestimmen Sie die folgenden Mengen

$$\begin{aligned}
A &:= \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \middle| \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1+\frac{1}{x+2}}{1-\frac{1}{x+2}} = 3 \right\}, \\
B &:= \{ y \in \mathbb{R} \mid \sin(\pi y) = 0 \}, \\
C &:= \{ z \in \mathbb{R} \mid 2z^2 + 2z = 12 \}, \\
D &:= \{ w \in \mathbb{R}^+ \mid \ln(w) - 3\ln(2) \leq 2 \}, \\
E &:= \left\{ v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \middle| \tan(v) \leq \sin(v) \right\}, \\
F &:= C \cup (A \setminus B), \\
G &:= (C \cap D) \cup E
\end{aligned}$$

2.K Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}.$$

Lösungen

2.1 (a) Die Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der günstigen durch die Anzahl der möglichen Ausgänge der Lottoziehung. Um aus einer Menge mit n Elementen k Elemente auszuwählen hat man $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. Um also k Richtige zu haben muss man k der 6 richtigen Zahlen und $6-k$ der 43 falschen Zahlen haben. Als mögliche Ausgänge kann man 6 der 49 Zahlen haben. Es ergibt sich somit die Wahrscheinlichkeit für k Richtige:

$$\frac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}.$$

(b) Um mindestens 3 Richtige zu haben addiert man die Wahrscheinlichkeiten 3,4,5 oder 6 Richtige zu haben, also ist die Wahrscheinlichkeit

$$\sum_{k=3}^{6}\frac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}.$$

2.2 Es gilt

$$A=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k=(1+(-1))^n=0.$$

2.3 Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

(a)

$$\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{k} ik = 1+(2+4)+(3+6+9)+(4+8+12+16)=65.$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{10}\sum_{i=1}^{10} ik=\sum_{k=1}^{10}k\sum_{i=1}^{10}i=\left(\sum_{i=1}^{10}i\right)\left(\sum_{k=1}^{10}k\right)=\left(\sum_{i=1}^{10}i\right)^2=\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2=55^2=3025.$$

(c)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{10}\sum_{i=1}^{10}(i+k) &= \left(\sum_{k=1}^{10}\sum_{i=1}^{10}i\right)+\left(\sum_{k=1}^{10}\sum_{i=1}^{10}k\right)\\
&= 2\sum_{k=1}^{10}\sum_{i=1}^{10}i\\
&= 2\sum_{k=1}^{10}\frac{10\cdot 11}{2}=2\sum_{k=1}^{10}55\\
&= 2\cdot 55\cdot 10=1100
\end{aligned}$$

2.4 Sei $x \neq 1$.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt die Aussage, da

$$\prod_{k=0}^{0}\left(1+x^{2^k}\right) = 1 + x^{2^0} = 1 + x = \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^{2^{0+1}}}{1-x}.$$

Induktionsannahme: Die Aussage gelte für **ein beliebiges** $n \in \mathbb{N}_0$, d.h. es gelte

$$\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

Induktionsbehauptung: Dann gilt die Aussage auch für $n+1$, d.h. wir müssen zeigen

$$\prod_{k=0}^{n+1}\left(1+x^{2^k}\right) = \frac{1-x^{2^{(n+1)+1}}}{1-x}.$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n+1}\left(1+x^{2^k}\right) &= \left(1+x^{2^{n+1}}\right)\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right) \\
&\overset{Induktionsannahme}{=} \left(1+x^{2^{n+1}}\right)\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \\
&= \frac{\left(1-(x^{2^{n+1}})^2\right)}{1-x} \\
&= \frac{\left(1-(x^{2^{n+1}\cdot 2})\right)}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{2^{(n+1)+1}}}{1-x}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen.

2.5 Die Voraussetzungen sind

Im Fluss gibt es genau zwei Fischarten, Leckerellen und Ekelitzen:	$F = L \cup E; L \neq \emptyset; E \neq \emptyset$
Leckerellen sind Delikatessen:	$L \subseteq F \setminus U$
Ekelitzen sind ungenießbar:	$E \subseteq U$
Jeder gelbe Fisch ist eine Ekelitzen:	$G \subseteq E$
Jede Leckerelle wiegt höchstens 500g:	$L \subseteq M_{500}$
Jede Ekelitze wiegt mehr als 300g:	$E \subseteq F \setminus M_{300}$
	oder $E \cap M_{300} = \emptyset$

(a) Es gibt gelbe Fische im Fluss: $G \neq \emptyset$

(b) Es gibt Fische in dem Fluss, die höchstens 500g wiegen: $M_{500} \neq \emptyset$

(c) Es gibt Fische im Fluss, die höchstens 500g wiegen und nicht gelb sind: $M_{500} \cap (F \setminus G) \neq \emptyset$

(d) Alle gelben Fische im Fluss wiegen mehr als 500g: $G \subseteq F \setminus M_{500}$

(e) Alle Fische im Fluss, die schwerer sind als 800g, sind ungenießbar: $F \setminus M_{800} \subseteq U$

(f) Alle Fische im Fluss, die höchstens 400g wiegen, sind genießbar: $M_{400} \subseteq F \setminus U$

(g) Jeder gelbe Fisch im Fluss, der höchstens 200g wiegt, ist blau: $G \cap M_{200} \subseteq B$

2.6 **Induktionsanfang**: Für $n = 1$ gilt die Aussage, da

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{1}{4} 1^2 (1+1)^2.$$

Induktionsannahme: Die Aussage gelte für **ein beliebiges** $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

Induktionsbehauptung: Dann gilt die Aussage auch für $n+1$, d.h. wir müssen zeigen

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4} (n+1)^2 (n+2)^2.$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= (n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3 \\
&\overset{Induktionsannahme}{=} (n+1)^3 + \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{4} (n+1)^2 [4(n+1) + n^2] \\
&= \frac{1}{4} (n+1)^2 (n+2)^2.
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

2.7 Wir formen zunächst die Gleichung in A um:

$$3 = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1 + \frac{1}{x+2}}{1 - \frac{1}{x+2}} \overset{x \notin \{0,-1,-2\}}{=} \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+2+1}{x+2-1} = \frac{2(x+1)}{x+1}.$$

Diese Gleichung hat keine Lösung und damit folgt

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \middle| \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1 + \frac{1}{x+2}}{1 - \frac{1}{x+2}} = 3 \right\} = \emptyset.$$

Weiterhin sind die Nullstellen des Sinus in $\pi\mathbb{Z}$. Also ist

$$B = \{y \in \mathbb{R} \mid \sin(\pi y) = 0\} = \mathbb{Z}.$$

Die Lösungsformel für die quadratische Gleichung $2z^2 + 2z - 12 = 0$ liefert

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}.$$

Damit ist

$$C = \{z \in \mathbb{R} \mid 2z^2 + 2z = 12\} = \{-3, 2\}.$$

Wegen $w \in \mathbb{R}^+$ ist der Logarithmus in der Definition von D wohldefiniert. Es gilt

$$\ln(w) - 3\ln(2) \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{w}{2^3}\right) \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad w \leq 8e^2,$$

wobei die letzte Äquivalenz aus der strengen Monotonie der Exponentialfunktion folgt. Somit ist

$$D = \{w \in \mathbb{R}^+ \mid \ln(w) - 3\ln(2) \leq 2\} = (0, 8e^2].$$

Nach Definition gilt mit $\cos(v) > 0$ für $v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
\tan(v) \leq \sin(v) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(v)}{\cos(v)} \leq \sin(v) \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(v) \leq \sin(v)\cos(v) \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(v)(1 - \cos(v)) \leq 0
\end{aligned}$$

Damit gilt Gleichheit für $v = 0$ und, da der Faktor $(1 - \cos(v))$ für $v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ positiv ist, muss dann $\sin(v) \leq 0$ sein, also $v \leq 0$ sein. Es folgt

$$E = \left\{v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \middle| \tan(v) \leq \sin(v)\right\} = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right].$$

Nun erhalten wir

$$F = C \cup (A \setminus B) = \{-3, 2\} \cup (\emptyset \setminus \mathbb{Z}) = \{-3, 2\} \cup \emptyset = \{-3, 2\}.$$

$$G = (C \cap D) \cup E = (\{-3, 2\} \cap (0, 8e^2]) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right] = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \{2\}.$$

2.K **Induktionsanfang**: Für $n = 1$ gilt die Aussage, da

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} = \frac{(1+1)! - 1}{(1+1)!}.$$

Induktionsannahme: Die Aussage gelte für **ein beliebiges** $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}.$$

Induktionsbehauptung: Dann gilt die Aussage auch für $n+1$, d.h. wir müssen zeigen

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(n+2)!-1}{(n+2)!}.$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} &= \frac{n+1}{(n+2)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \\
&\overset{Induktionsannahme}{=} \frac{n+1}{(n+2)!} + \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)+[(n+1)!-1](n+2)}{(n+2)!} \\
&= \frac{(n+2)!-1}{(n+2)!}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.