Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. Matthias Gerdts

Herbsttrimester 2017

10. Übungsblatt Mathematik II

10.1 Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

10.2 Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^2+1}$ divergiert.

10.3 Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k+5}{5k+2}\right)^k$ auf Konvergenz.

10.4 Berechnen Sie im Punkt $x = 0$ die Taylor-Reihen und die Konvergenzradien von

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$,

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \cosh(x)$.

10.5 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x)$

(a) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von f um den Punkt $a = 1$.

(b) Bestimmen Sie das maximale Konvergenzintervall der Reihe.

(c) Geben Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades an und schätzen Sie damit den maximalen Approximationsfehler im Punkt $b = 2$ ab.

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) und der Annahme, dass f mit seiner Taylor-Reihe auf deren Konvergenzintervall übereinstimmt, die Taylor-Reihe von $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{x}$.

10.K Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$,

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n)}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$, Berechnen Sie den Wert der Reihe.

10.B1 **Bonusaufgabe:** Finden Sie den Fehler in folgendem Beweis, der $\frac{1}{2}\ln(2) = \ln(2)$ zeigt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln(2) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + - \ldots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + - \ldots \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \ldots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
&= \ln(2)
\end{aligned}$$

10.B2 **Bonusaufgabe:** Am einen Ende eines Gummibandes macht sich ein Weihnachtsmann auf den Weg zu einer am anderen Ende wohnenden Familie, um dort Weihnachtsgeschenke zu überbringen. Das Gummiband hat eine anfängliche Länge von 100 km. Jeden Tag legt der (wegen der schweren Last nur mühsam vorankommende) Weihnachtsmann 10 km zurück. In den Nächten, während der erschöpfte Weihnachtsmann schläft, wird das Gummiband von einem bösen Geist gleichmäßig um 100 km gedehnt. (Es wird also auch der bereits zurückgelegte Abschnitt des Bandes mitgedehnt.) Erreicht der Weihnachtsmann jemals das andere Ende des Bandes? (Das Gummiband wird dabei als unbegrenzt dehnbar, der Weihnachtsmann als unbegrenzt ausdauernd angenommen. Ferner soll es keine Rolle spielen, ob er noch rechtzeitig zu Weihnachten am Ziel ankommt.)

Lösungen

10.1 Wir nutzen Partialbruchzerlegung und Indexverschiebung und erhalten damit für die Partialsummen $s_n, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1/2}{2k-1} - \frac{1/2}{2k+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2(k-1)+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2k-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2(n+1)-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)
\end{aligned}$$

Der Reihenwert a ist der Grenzwert der Folge der Partialsummen und somit ist

$$a = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

10.2 *1. Lösungsweg:* Wir können das Minorantenkriterium (Satz 2.1.10) verwenden. Hierbei schätzen wir für $k \in \mathbb{N}$ ab:

$$a_k := \frac{2k}{k^2+1} = \frac{2}{k+\frac{1}{k}} > \frac{2}{2k} = \frac{1}{k} =: b_k$$

Da die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ eine divergente Minorante für $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^2+1}$, also ist auch diese Reihe divergent.

2. Lösungsweg: Wir können die Divergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^2+1}$ mittels des Grenzwertvergleichstest (Satz 2.1.12) und der harmonischen Reihe zeigen. Hierzu setzen wir für $k \in \mathbb{N}$

$$a_k := \frac{2k}{k^2+1} > 0 \qquad \text{und} \qquad b_k := \frac{1}{k} > 0.$$

Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k/(k^2+1)}{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k^2}{k^2+1} = 2.$$

Da der Grenzwert existiert sind entweder beide Reihen konvergent oder beide Reihen divergent. Da die harmonische Reihe bekanntlich divergiert, haben wir gezeigt, dass auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^2+1}$ divergiert.

10.3 Wir wollen das Wurzelkriterium anwenden und berechnen dazu für $a_k := \left(\frac{2k+5}{5k+2}\right)^k$:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\left(\frac{2k+5}{5k+2}\right)^k\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+5}{5k+2} = \frac{2}{5} < 1.$$

Damit ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k+5}{5k+2}\right)^k$ nach dem Wurzelkriterium konvergent.

10.4 (a) Für die Ableitungen von $f(x) = \cos(x)$ im Nullpunkt erhalten wir in einem 4-Zyklus für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} (f)^{(4k)}(0) &= \cos(0) = 1, \\ (f)^{(4k+1)}(0) &= -\sin(0) = 0, \\ (f)^{(4k+2)}(0) &= -\cos(0) = -1, \\ (f)^{(4k+3)}(0) &= \sin(0) = 0. \end{aligned}$$

Damit hat die Taylor-Reihe nur gerade Potenzen und diese treten mit alternierenden Vorzeichen auf. Es ergibt sich die Taylor-Reihe

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Mit dem Quotientenkriterium folgt

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+2} (2k)!}{(2k+2)!(-1)^k x^{2k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{x^2}{(2k+2)(2k+1)} = 0,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist der Konvergenzradius $R = \infty$.

(b) Wir verwenden die Definition des cosh mittels Exponentialfunktion, für die wir bereits die Taylor-Reihe kennen.

$$g(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right).$$

Da beide Reihen für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergieren, können wir sie nach Satz (2.1.9) addieren und erhalten

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1 + (-1)^n)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Der Konvergenzradius ist damit wie der der beiden einzelnen Reihen $R = \infty$.

10.5 (a) Zur Bestimmung der Taylorreihe benötigen wir die Ableitungen von $f(x) = \ln(x)$. Für die ersten vier Ableitungen berechnen wir

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x}, \quad f^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{1 \cdot 2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}.$$

Hieraus ergibt sich die Vermutung, dass

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Diese beweisen wir mittels vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt die Formel, wegen

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x} = (-1)^2 \frac{0!}{x} = (-1)^{1+1} \frac{(1-1)!}{x^1}.$$

Induktionsannahme: Die Formel $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$ sei für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig. Dann gilt für die $(n+1)$-te Ableitung:

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) \overset{IA}{=} \left((-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n} \right)' = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!(-n)}{x^{n+1}} = (-1)^{n+2} \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Formel damit für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wegen $f^{(0)}(x) = f(x)$ erhalten wir die Taylor-Reihe von f um $a = 1$:

$$\begin{aligned} T(x) &= f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= \ln(1) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{1^n \cdot n!} (x-1)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n \end{aligned}$$

(b) Zur Bestimmung des Konvergenzradiuses betrachten wir

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}(x-1)^{n+1} \cdot n}{(n+1) \cdot (-1)^{n+1}(x-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} |x-1| = |x-1|$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe, wenn $|x-1| < 1$. Somit liegt Konvergenz im Intervall $(0,2)$ vor, und der Konvergenzradius ist 1. Zur Bestimmung des maximalen Konvergenzintervalls müssen noch die Grenzen untersucht werden: Für $x = 0$ erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (0-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}.$$

Diese divergiert (harmonischen Reihe). Für $x = 2$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (2-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Dies ist die alternierende harmonische Reihe und somit haben wir Konvergenz. Das maximale Konvergenzintervall der Taylor-Reihe ist folglich das halboffene Intervall $(0,2]$.

(c) Das 2-te Taylor-Polynom ist

$$T_2(x) = \sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n = \frac{1}{1}(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}.$$

Da die Funktion $f(x) = \ln(x)$ auf $[1,2]$ beliebig oft (es genügt dreimal) stetig differenzierbar ist, gilt für alle $x \in [1,2]$ nach dem Satz von Taylor

$$\ln(x) = f(x) = T_2(x) + R_2(x)$$

mit dem für ein $\xi \in [1,2]$ definierten Restglied (nach Lagrange)

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-1)^3 = \frac{2}{6\xi^3}(x-1)^3 = \frac{(x-1)^3}{3\xi^3}.$$

Damit gilt für den maximalen Approximationsfehler in $b=2$:

$$|\ln(2) - T_2(2)| = \left|\ln(2) - \frac{1}{2}\right| = |R_2(2)| = \left|\frac{(2-1)^3}{3\xi^3}\right| < \left|\frac{1}{3\cdot 1^3}\right| = \frac{1}{3}.$$

Dies beweist $\ln(x) \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right]$.

(d) Die Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ ist die Ableitung der Funktion f. Mit (a) erhalten wir somit die Taylor-Reihe durch gliedweise Differentiation:

$$\tilde{T}(x) = T'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-1)^{n-1}.$$

10.K (a) Hier ist die Folge der Summanden $a_n = \frac{n}{e^n}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot e^n}{e^{n+1}\cdot n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{e\cdot n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{e} = \frac{1}{e} < 1.$$

Also ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$ nach dem Quotientenkriterium (Satz 2.1.21) absolut konverget.

(b) Wegen des Faktors $(-1)^n$ ist die Reihe alternierend. Ferner liegt wegen

$$b_{n+1} = \frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln(n)} = b_n$$

Monotonie vor, und wegen

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n)} = 0,$$

haben wir eine Nullfolge. Damit ist die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n)}$ konvergent (Leibniz-Kriterium, Satz 2.1.15).

(c) Wegen

$$\frac{\sqrt{n}+1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} > \frac{1}{n},$$

und da die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, hat die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n}$ eine divergente Minorante, ist also selbst nach dem Minorantenkriterium divergent.

(d) Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{6}\right)^n + \left(\frac{3}{6}\right)^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Die letzte Umformung gilt, da beide Reihen konvergieren, da sie jeweils geometrische Reihen sind. Mit dem Wert geometrischen Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$ und unter Beachtung der unteren Summengrenze $n = 1$ folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 \right) + \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \right) = \frac{3}{2}.$$

Damit ist die Reihe konvergent mit dem Wert $\frac{3}{2}$.

10.B1 Der Fehler liegt darin, dass man beim vierten Gleichheitszeichen die Reihe umsortiert. Dies ist nur für absolut konvergente Reihen möglich. Die Logarithmus-Reihe ist aber nur uneigentlich konvergent, also nicht absolut konvergent, da die alternierende harmonische Reihe zwar konvergiert, aber die Reihe über die Beträge der Summanden als harmonische Reihe divergiert. Nach dem Riemannschen Umordnungssatz kann man jeden beliebigen Reihenwert durch eine geeignete Umsortierung erhalten.

10.B2 Es sei r_n der Quotient der nach n Tagen zurückgelegten Strecke und der Länge des Gummibandes am Abend des n-ten Tages vor der nächtlichen Dehnung. Dann ist

$$r_1 = \frac{10km}{100km} = \frac{1}{10}.$$

Am $(n+1)$-ten Tag hat das Band die Länge $(n+1) \cdot 100km$ und der Weihnachtsmann legt wieder 10 km zurück. Damit folgt

$$r_{n+1} = r_n + \frac{10km}{(n+1) \cdot 100km} = r_n + \frac{1}{10(n+1)}$$

für alle $n \geq 1$. Induktiv folgt daher mit $r_1 = \frac{1}{10}$

$$r_n = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

für alle $n \geq 1$. Da die harmonische Reihe divergiert, gibt es ein $N \geq 1$ mit $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 10$. Dann ist $r_N \geq 1$, d.h. nach spätestens N Tagen erreicht der Weihnachtsmann das andere Ende des Gummibandes. *Bemerkung: Das kleinste solche N ist 12367, d.h. der Weihnachtsmann braucht fast 34 Jahre.*