Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Prof. Dr. Matthias Gerdts

10. Übungsblatt Mathematik II

10.1 Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

10.2 Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^2+1}$ divergiert.

10.3 Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k+5}{5k+2}\right)^k$ auf Konvergenz.

10.4 Berechnen Sie im Punkt $x = 0$ die Taylor-Reihen und die Konvergenzradien von

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$,

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \cosh(x)$.

10.5 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x)$

(a) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von f um den Punkt $a = 1$.

(b) Bestimmen Sie das maximale Konvergenzintervall der Reihe.

(c) Geben Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades an und schätzen Sie damit den maximalen Approximationsfehler im Punkt $b = 2$ ab.

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) und der Annahme, dass f mit seiner Taylor-Reihe auf deren Konvergenzintervall übereinstimmt, die Taylor-Reihe von $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{x}$.

10.K Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$,

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n)}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$, Berechnen Sie den Wert der Reihe.

10.B1 **Bonusaufgabe:** Finden Sie den Fehler in folgendem Beweis, der $\frac{1}{2}\ln(2) = \ln(2)$ zeigt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln(2) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + - \ldots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + - \ldots \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \ldots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
&= \ln(2)
\end{aligned}$$

10.B2 **Bonusaufgabe:** Am einen Ende eines Gummibandes macht sich ein Weihnachtsmann auf den Weg zu einer am anderen Ende wohnenden Familie, um dort Weihnachtsgeschenke zu überbringen. Das Gummiband hat eine anfängliche Länge von 100 km. Jeden Tag legt der (wegen der schweren Last nur mühsam vorankommende) Weihnachtsmann 10 km zurück. In den Nächten, während der erschöpfte Weihnachtsmann schläft, wird das Gummiband von einem bösen Geist gleichmäßig um 100 km gedehnt. (Es wird also auch der bereits zurückgelegte Abschnitt des Bandes mitgedehnt.) Erreicht der Weihnachtsmann jemals das andere Ende des Bandes? (Das Gummiband wird dabei als unbegrenzt dehnbar, der Weihnachtsmann als unbegrenzt ausdauernd angenommen. Ferner soll es keine Rolle spielen, ob er noch rechtzeitig zu Weihnachten am Ziel ankommt.)