Universität der Bundeswehr München
Institut für Plasmatechnik und Mathematik
Prof. Dr. Dr. S. Schäffler

Herbst 2016

Bachelor BAU, EIT, LRT: Mathematik 1

Zeit der Prüfung: Dienstag, 15.11.2016, 9.45 - 11.15 Uhr.
Die Prüfung besteht aus 7 Aufgaben.
Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.
Bei allen Aufgaben muss der Lösungsweg deutlich erkennbar sein.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Abbildungen f_i sind injektiv, surjektiv, bijektiv?

a) $f_1 : [0,1] \to [1,2]$, $x \mapsto 1 + x^2$.

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x - y$.

Begründen Sie Ihre Antworten und geben Sie im Fall der Bijektivität die Umkehrabbildung f_i^{-1} an.

Aufgabe 2

a) Geben Sie den Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = \frac{1}{i} + \frac{5i}{1-2i}$ an.

b) Berechnen Sie den Betrag der komplexen Zahl $z = \frac{1+900i}{1-900i}$.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichungen

$$\text{(i) } 2z - z\overline{z} = i \qquad \text{(ii) } z^4 - 5z^2 - 36 = 0.$$

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x + y + z &= 2 \; . \\ x - y + z &= -1 \end{aligned}$$

b) Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y + z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \\ x + y &= 2a \\ 2x - 2y + az &= -a \end{aligned}$$

keine Lösung?

bitte wenden

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie (z.B. mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes) $\sum\limits_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 2^k$.

b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: $2n+1 < 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Aufgabe 5

Untersuchen Sie die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

auf lineare Unabhängigkeit.

Aufgabe 6

Welche der folgenden Abbildungen f_i sind linear:

a) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x$

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (xy, x + y)$

c) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, y, 1)$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 7

a) Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Berechnen Sie die Matrix $B^{-1}AB$.

(ii) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A und geben Sie eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an mit $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

(iii) Sind die Matrizen A und C ähnlich? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie die Eigenwerte der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten an.