Universität der Bundeswehr
Institut für Plasmatechnik und Mathematik
Prof. Dr. Dr. S. Schäffler

Frühjahr 2017

Bachelor BAU, EIT, LRT: Mathematik 1

Zeit der Prüfung: Mittwoch, ?.9.2017, ?.45 - ?.15 Uhr.
Die Prüfung besteht aus 7 Aufgaben.
Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.
Bei allen Aufgaben muss der Lösungsweg deutlich erkennbar sein.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Abbildungen f_i sind injektiv, surjektiv, bijektiv?

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$

b) $f_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^2$, $\alpha \mapsto (\alpha - 1, \alpha)$

c) $f_3 : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $(m, p) \mapsto (p, m)$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2

a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, dar: (i) $\frac{1}{\sqrt{2}-i} + \frac{1}{i}$ (ii) $(1 - \frac{2i}{1+i})^{17}$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichungen

(i) $\overline{z} - \frac{4}{z} = 3i$ (ii) $z^4 - 2z^2 - 3 = 0.$

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x + y + 16z &= 0 \\ x - 2y - z &= 2. \\ x - y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

b) Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + az &= a \\ ax + y - z &= a \\ x + ay + z &= 1 \end{aligned}$$

die Lösung: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

bitte wenden

Aufgabe 4

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

a) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2,\ n \in \mathbb{N}.$ b) $(1+h)^n \geq 1 + nh,\ h \in \mathbb{R}_0^+, n \in \mathbb{N}_0.$

Aufgabe 5

Untersuchen Sie die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

auf lineare Unabhängigkeit.

Aufgabe 6

Welche der folgenden Abbildungen f_i sind linear:

a) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (\cos(x), 0, z-x)$

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, (x,y) \mapsto (x, x+y, y, x-y)$

c) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x,y,z) \mapsto (x^2, x+y)$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 7

a) Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A und geben Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an mit $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Sind die Matrizen A und C ähnlich? (Begründen Sie Ihre Antwort)

b) Geben Sie die Eigenwerte der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

sowie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an.