Bachelorprüfung Mathematik I

Die Klausur besteht aus 8 Aufgaben.
Es sind keinerlei weitere Hilfsmittel zugelassen.
Bei allen Aufgaben muss der Lösungsweg deutlich erkennbar sein.

Aufgabe 1

Es sei $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to (0,1),\ x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

bijektiv ist und geben Sie die Umkehrfunktion an.

Aufgabe 2

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Aufgabe 3

a) Geben Sie den Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $\frac{4}{(1+i)^2}$ an.
b) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z(1+\bar{z}) = 1 - i$.

Aufgabe 4

Es seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Begründen Sie, warum der Winkel $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt.

b) Geben Sie die orthogonale Zerlegung $\vec{a} = \vec{a}_{\vec{b}} + \vec{a}_{\vec{n}}$ von $\vec{a}$ bzgl. $\vec{b}$ an und verifizieren Sie $\vec{a}_{\vec{b}} \perp \vec{a}_{\vec{n}}$.

c) Geben Sie einen Vektor $\vec{c}$ an, der senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene steht.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Funktionen f_i sind linear:
a) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto f_1(x,y,z) = (-x, 3z - 4y, x + y + 2z)$
b) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto f_2(x,y,z) = (2y - x, xz)$
Begründen Sie ihre Antworten.

bitte wenden →

Aufgabe 6

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

gegeben.

a) Für welche Werte von α ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar? Geben Sie für diesen Fall die Lösungsmenge an.

b) Zeigen Sie, dass die Spalten von A linear abhängig sind.

Aufgabe 7

Es sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie A^{-1}.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A.

c) Geben Sie eine Matrix B an mit

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8

Es sei $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, und $A := E_n + uu^T$.

a) Berechnen Sie Au sowie Av für $v \perp u$.

b) Was lässt sich aufgrund des Ergebnisses von Teilaufgabe a) über die Eigenwerte und Eigenvektoren von A sagen?

Formelsammlung

- Binomische Formel: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
- Parallelverschiebung um (x_0, y_0): $g(x) = f(x - x_0) + y_0$
- Sinus- und Cosinusfunktion: $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$, $-\cos(\alpha) = \cos(\pi - \alpha)$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

- Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})), & \vec{a}, \vec{b} \neq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- Komplexe Zahlen: $z = x + iy$, $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Lineare Algebra:
  - $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar
    $\Leftrightarrow (Ax = 0 \Rightarrow x = 0)$
    $\Leftrightarrow \text{Rang}(A) = n$
    $\Leftrightarrow$ Spalten/Zeilen von A linear unabhängig
    $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
    $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte sind nicht 0
  - Dimensionsformel: $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow n = \text{Rang}(A) + \text{Dim}(\text{Kern}(A))$
  - Orthogonale Zerlegung von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$: $\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$, $\vec{a}_{\vec{n}} = \vec{a} - \vec{a}_{\vec{b}}$
  - $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal
    $\Leftrightarrow A^T A = E_n$
  - f linear
    $\Leftrightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$
  - $A = (a_1 \ldots a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$
    $\rightarrow \text{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = 0\}$, Spaltenraum: $\left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i;\ \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$