Prof. Dr. Matthias Gerdts
Institut für Mathematik und Rechneranwendung
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik

Universität der Bundeswehr München

Modulprüfung

Mathematik I

am 14.11.2014

Name: Vorname:

Matrikel-Nr.:

Punktzahl:

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
max. Pkt.	10	5	7	8	12	42
erreicht						

Note:

Erstprüfer

Datum/Unterschrift

Aufgabe 1 **10 P.**

Kreuzen Sie die richtigen der vorgegebenen Antworten hier auf Ihrem Aufgabenblatt an. Es können in manchen Aufgaben mehrere der vorgegebenen Antworten richtig sein.

1. [2 P.] Welche der folgenden Ausdrücke sind äquivalent zu $\exp(\ln(2x))$?

   a) $\ln\left(e^{2x}\right)$, b) $2x$, c) x^2,
   d) $\ln(\exp(x^2))$, e) Keine der Antworten a) - d).

2. [2 P.] Gegeben sei das Polynom $p(x) = (x-1)(x+2)(4x^2+8x+4)(x^2+2)$.
   Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

   a) Über $\mathbb{C}$ kann man p als Produkt von 6 Linearfaktoren schreiben.
   b) Über $\mathbb{R}$ kann man p als Produkt von 6 Linearfaktoren schreiben.
   c) Über $\mathbb{R}$ kann man p als Produkt von 4 Linearfaktoren schreiben.
   d) Für $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind $x = i$ und $x = -i$ Nullstellen von p.
   e) Keine der Antworten a) - d).

3. [2 P.] Gegeben sei die binomische Summenformel

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}.$$

   Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

   a) $S_1 = 0$, b) $\binom{4}{2} = 6$, c) $S_3 = 3^n$, d) $S_n = 4^n$, e) Keine der Antworten a) - d).

4. [2 P.] Geben Sie Kern und Bild für folgende Matrix an:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   a) $\text{Kern}(A) = \vec{0}$, $\text{Bild}(A) = \mathbb{R}^2$
   b) $\text{Kern}(A) = \text{Bild}(A) = \mathbb{R}$
   c) $\text{Kern}(A) = \{[r, s, -(r+2s)/3]^\top \mid r, s \in \mathbb{R}\}$, $\text{Bild}(A) = \{[t, 0]^\top \mid t \in \mathbb{R}\}$
   d) $\text{Kern}(A) = \{[s, 2s]^\top \mid s \in \mathbb{R}\}$, $\text{Bild}(A) = \{[2, 3-t]^\top \mid t \in \mathbb{R}\}$
   e) Keine der Antworten a) - d).

5. [2 P.] Seien $w = 4 - i$, $z = 1 + 3i \in \mathbb{C}$. Der Ausdruck $w^2 + z\overline{z}$ ist gleich:

   a) $10 + 7i$, b) $25 - 8i$, c) $15 - 2i$, d) $\dfrac{-1+17i}{12}$, e) Keine der Antworten a) - d).

Aufgabe 2 **5 P.**

Beweisen Sie mithilfe vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}.$$

Aufgabe 3 **7 P.**

Wir betrachten zwei Ebenen E_1 und E_2 im dreidimensionalen reellen Raum. Die beiden Ebenen seien gegeben in Parameterdarstellung:

$$E_1 = \{\vec{x} = \vec{p} + t_1\vec{r}_1 + t_2\vec{r}_2 \,|\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit } \vec{p} = [0,0,0]^\top, \vec{r}_1 = [1,0,0]^\top, \vec{r}_2 = [0,1,1]^\top$$

$$E_2 = \{\vec{x} = \vec{q} + \tau_1\vec{\rho}_1 + \tau_2\vec{\rho}_2 \,|\, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit } \vec{q} = [1,2,3]^\top, \vec{\rho}_1 = [2,-4,0]^\top, \vec{\rho}_2 = [2,1,0]^\top$$

a) [2 P.] Berechnen Sie die Kreuzprodukte $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ und $\vec{\rho}_1 \times \vec{\rho}_2$.

b) [3 P.] Geben Sie die Ebene E_2 in Hessescher Normalform an. Benutzen Sie dabei den angegebenen Ortsvektor $\vec{q}$ und vereinfachen Sie soweit wie möglich. Erinnern Sie sich an die Vorzeichenkonvention für den Normalenvektor.

c) [2 P.] Bestimmen Sie einen Normalenvektor zur Ebene E_1. Geben Sie den Schnittwinkel ϕ zwischen beiden Ebenen E_1 und E_2 an.

Aufgabe 4 **8 P.**

Gegeben sei die Matrix

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) [2 P.] Vergewissern Sie sich, dass die gegebene Matrix M in der Tat invertierbar ist, indem Sie die Determinante von M berechnen.

b) [6 P.] Berechen Sie die Inverse M^{-1} mit Hilfe des Gauß-Algorithmus aus der Vorlesung (d.h. ohne Pivoting).

Aufgabe 5 **12 P.**

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) [5 P.] Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie zunächst, dass $\lambda_3 = 0$ ein Eigenwert von A ist. Finden Sie die übrigen beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2, wobei die Bezeichnung so zu wählen ist, dass $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Begründen Sie dass A diagonalisierbar ist.

b) [4 P.] Zeigen Sie, dass

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zu λ_3 ist. Berechnen Sie jeweils **alle** Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2. Wählen Sie unter diesen unendlich vielen Eigenvektoren die Eigenvektoren $\vec{v}_i$, $i = 1, 2$, so dass jeweils der erste Eintrag 1 ist.

c) [3 P.] Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D mit Diagonalelementen $d_{11} \geq d_{22} \geq d_{33}$ und eine invertierbare Matrix T mit $T^{-1}AT = D$. Überprüfen Sie Ihre Rechnung, ohne dabei T^{-1} explizit zu berechnen.

Hinweise

- Lesen Sie diese Hinweise vollständig durch.
- Als Hilfsmittel zur Klausur sind nur zwei beidseitig handgeschriebene DIN A4-Blätter zugelassen. Dagegen sind Taschenrechner, Mobiltelefone und andere elektronische Hilfsmittel sowie Skripte, Bücher, etc. nicht erlaubt.
- Tragen Sie bitte auf jedem abgegebenen Blatt in der rechten oberen Ecke Ihren **Namen und Vornamen** ein.
- Lesen Sie die Aufgabenstellungen sorgfältig.
- Schreiben Sie leserlich; benutzen Sie lieber ein Blatt mehr.
- Beginnen Sie die Lösung jeder Aufgabe auf einer neuen Seite. Sollte die Aufgabe an einer anderen Stelle fortgesetzt werden, schreiben Sie bitte

  Fortsetzung auf Seite xx

  dazu.
- Zu den Kurzaufgaben in Aufgabe 1: Diese können ohne größere Rechnungen beantwortet werden. Daher wird nur das Ergebnis, ob richtig oder falsch, bewertet. Zwischenschritte müssen nicht angegeben werden und werden auch nicht zur Bewertung herangezogen.
  Kreuzen Sie die richtigen der vorgegebenen Antworten hier auf Ihrem Aufgabenblatt an. Für jede richtig angekreuzte Teilaufgabe gibt es 2 Punkte.
  Es können in manchen Aufgaben mehrere der vorgegebenen Antworten richtig sein. Für jede falsch angekreuzte Antwort gibt es -1 Punkt, mindestens jedoch 0 Punkte pro Teilaufgabe.
- Geben Sie bei Aufgabe 2-5 den Lösungsweg an; beschreiben Sie (auch in Worten), was Sie tun; geben Sie auch alle Nebenrechnungen an.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und vermeiden Sie die Farbe Rot.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.