Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik

Prof. Dr. Matthias Gerdts
Institut für Mathematik und Rechneranwendung (LRT1)

Was ist Optimale Steuerung?

Die Optimale Steuerung ist ein relativ junges Gebiet der Mathematik, das auf viele praktische Probleme angewendet werden kann. Da wesentliche Teile der Lösungsverfahren erst in den 60er Jahren gefunden wurden, gibt es sowohl in der Praxis als auch in der Theorie noch vieles zu erforschen.

Die Aufgabe ist schnell formuliert: Gesucht sind eine Steuerung $u(t)$ und eine Zustandsfunktion $x(t)$, so dass die Zielfunktion

$$\int_0^1 f_0(x(t), u(t))dt$$

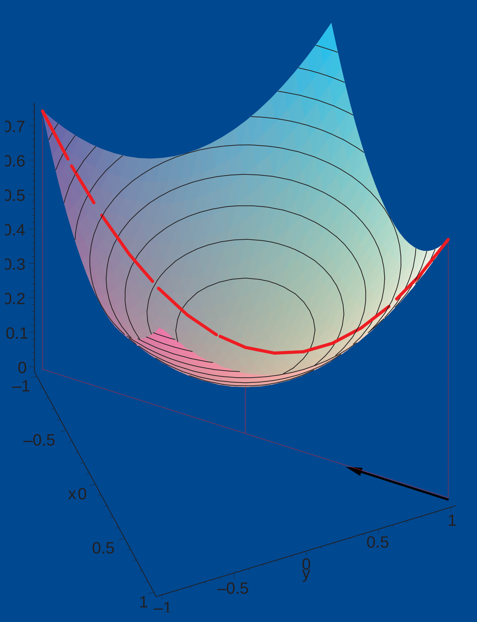
minimiert wird. Dabei sollen u und x folgende Nebenbedingungen erfüllen:

- Differentialgleichungsnebenbedingung
  $x'(t) = f(x(t), u(t))$
- Randbedingungen
  $\Psi(x(0), x(1)) = 0$
- Beschränkungen
  $c(x(t), u(t)) \leq 0$

Was bedeutet das?

- Mit Hilfe der Differentialgleichung lassen sich viele physikalische Prozesse beschreiben. Die Bewegung eines Pendels, eines Fahrzeugs oder eines Roboters werden auf diese Weise zu einem mathematischen Modell. Dabei beschreibt die Zustandsfunktion $x(t)$ Position und Geschwindigkeit. Dieses Modell lässt sich mit Hilfe der Steuerung $u(t)$ beeinflussen.
- Die Randbedingungen geben vor, in welchem Punkt das Modell starten soll. Bei Bedarf kann man in den Randbedingungen auch festlegen, wie der Endzustand aussieht. Bei der Laufkatze (siehe unten) z.B. soll nicht nur das Gefährt selbst stillstehen, sondern auch das angehängte Gewicht soll zum Schluss in Ruhe sein.
- Die Beschränkungen modellieren physikalische oder ökonomische Einschränkungen. Zum Beispiel kann ein Motor nur mit einer bestimmten Höchstgeschwindigkeit laufen, ein Flugzeug sollte niemals mit negativer Höhe fliegen, und ein Fahrzeug sollte auf einer vorgegebenen Strecke bleiben.
- Die Zielfunktion definiert das Kriterium bzgl. dessen ein Minimum gesucht wird. Zum Beispiel kann man den Energieverbrauch eines Satelliten minimieren oder die Zeit, die ein Fahrzeug für eine vorgegebene Strecke benötigt. Im Fall der Laufkatze kann man fordern, dass die angehängte Fracht möglichst wenig schwanken soll.

Lösungsansatz 1: Der direkte Weg



Bei direkten Verfahren werden Zustand und Steuerung durch Funktionen ersetzt, die sich durch endlich viele Parameter beschreiben lassen. Setzt man diese in die Nebenbedingungen und die Zielfunktion ein, so entsteht ein endlichdimensionales Optimierungsproblem. Zur numerischen Lösung werden häufig Abstiegsverfahren verwendet, die in einem Punkt z^k eine Abstiegsrichtung d^k bestimmen, dann eine Liniensuche

$$\min \quad \phi(\alpha) = f(z^k + \alpha d^k) \quad \text{bezüglich} \quad \alpha > 0$$

durchführen und $z^k + \alpha_{min} d^k$ als neue Iterierte nehmen.

Lösungsansatz 2: Der indirekte Weg

Bei indirekten Verfahren werden zunächst notwendige Optimalitätsbedingungen für das (unendlichdimensionale) Optimalsteuerungsproblem hergeleitet. Diese bilden ein Gleichungssystem der Form

$$F(z) = 0, \qquad F : Z \to Y$$

in Funktionenräumen Z und Y, das man z.B. mit einem Newtonverfahren

$$F'(z^k)d^k = -F(z^k), \qquad z^{k+1} = z^k + d^k, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

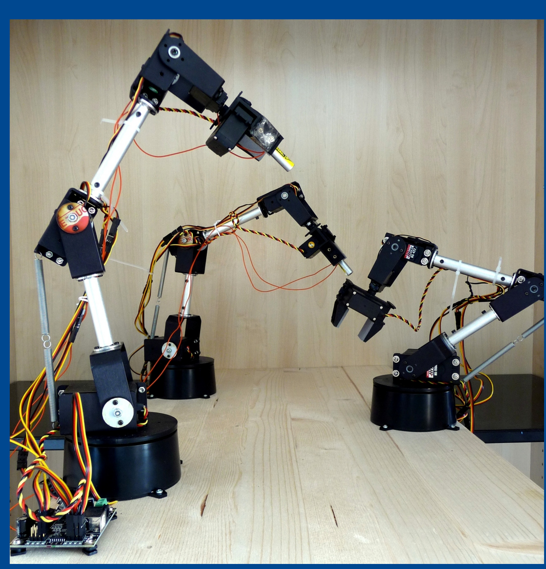
lösen kann. Um die dabei zu berechnende Suchrichtung d^k zu bestimmen, müssen lineare Randwertprobleme numerisch gelöst werden, wofür Diskretisierungsverfahren und numerische Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungen benötigt werden.

Anwendungen in der Universität

Roboterarme

Unsere Ziele bei der Steuerung von Roboterarmen:

- Umsetzung komplexer Aufgaben mit relativ geringem Aufwand (Die Roboter projizieren Laserbilder an eine Wand)
- Berücksichtigung von Zustandsbeschränkungen: Die Roboterarme dürfen sich nicht berühren



Testfahrten mit Lego

Unsere Ziele des Optimalen Fahrens bei Lego-Robotern:

- Intuitive Visualisierung von Trajektorien, die per Moving Horizon Technik errechnet werden
- Regelungstechniken können direkt verglichen werden: Proportionalregler, LQR- und PID-Regler
- Unterschiedliche Streckenverläufe können mit demselben Programm gefahren werden

Laufkatze

Unsere Ziele bei der Steuerung der Lego-Laufkatze:

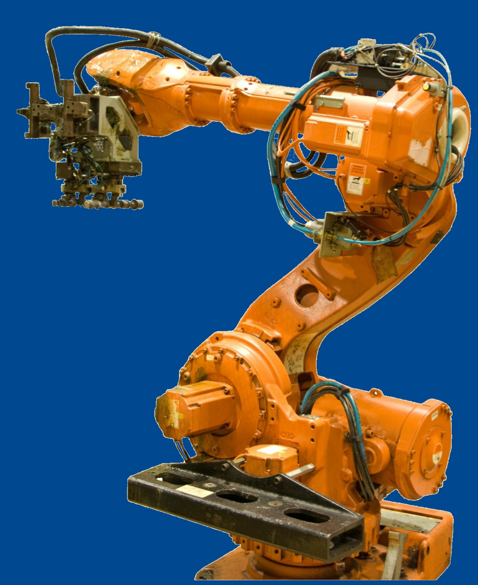
- Praktische Untersuchung von Sensitivitäten
- Einsatz von Regelungs-Algorithmen in nur teilweise beobachtbaren Systemen (die Auslenkung der Last wird nicht gemessen)
- Berechnung optimaler Steuerungen für Probleme mit verschiedenen Zielfunktionen, z.B. „minimales Schwanken" und „zeitminimale Steuerung"

Anwendungen in der Industrie

Industrieroboter

Ziele der Optimalen Steuerung von Roboterarmen in der Industrie:

- Schnellere Abläufe bei der Montage von Teilen ermöglichen höhere Produktivität bei gleichem Kostenaufwand
- Energieeffiziente Bewegung der Roboter verringert den Kostenaufwand und die Umweltbelastung



Golf GTi: Autonomes Fahren

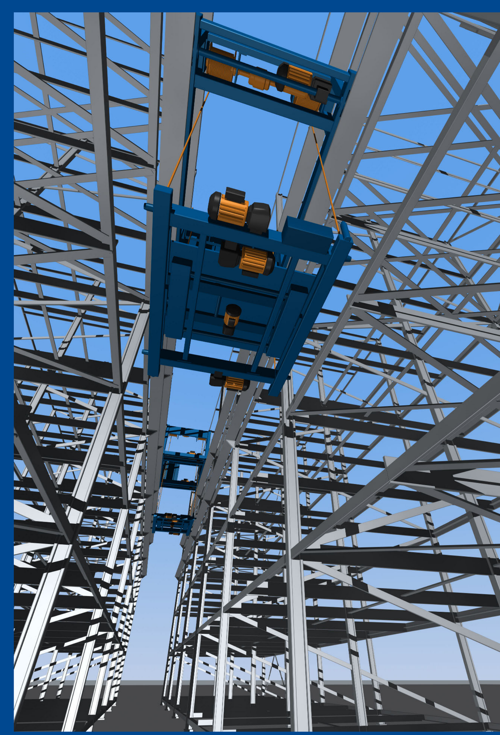
Ziele der Optimalen Steuerung bei Autos:

- Durch fehlenden Einfluss menschlicher Fahrer können unterschiedliche Fahrzeugsetups auf ihre Tauglichkeit getestet werden
- Unangenehme Szenarien, wie lange Fahrten auf Kopfsteinpflaster, müssen nicht mehr von menschlichen Testfahrern absolviert werden
- Fahrerassistenzsysteme

Warenlager

Ziele der Optimalen Steuerung der Laufkatze in der Industrie:

- Zeit- oder energieoptimaler Transport schwerer eingelagerter Waren
- Geringes Schwanken während des Transports erhöht die Sicherheit der Angestellten
- Durch Feedback- Steuerungen werden Störungen berücksichtigt, so dass die Steuerung diesen gegenüber unempfindlich wird



matthias.gerdts@unibw.de • www.unibw.de/lrt1/gerdts